

五年制高等职业教育  
**数学课程标准**  
(2023年)



# 目 录

一、课程性质与任务 .....	1
(一) 课程性质 .....	1
(二) 课程任务 .....	1
二、学科核心素养与课程目标 .....	2
(一) 学科核心素养 .....	2
(二) 课程目标 .....	5
三、课程结构 .....	6
(一) 课程模块 .....	6
(二) 学时安排 .....	8
四、课程内容 .....	8
(一) 基础模块 .....	8
(二) 拓展模块一 .....	24
(三) 拓展模块二 .....	41
五、学业质量 .....	46
(一) 学业质量内涵 .....	46
(二) 学业质量水平 .....	47
六、课程实施 .....	50
(一) 教学要求 .....	50
(二) 学业水平评价 .....	52
(三) 教材编写或选用要求 .....	54
(四) 课程资源开发与利用 .....	56
(五) 对地方与学校实施本课程的要求 .....	57

附录 1 .....	59
附录 2 .....	62
附录 3 .....	64
附录 4 .....	69
附录 5 .....	74

# 一、课程性质与任务

## （一）课程性质

数学是研究数量关系和空间形式的一门科学。数学承载着思想和文化，是人类文明的重要组成部分，与人类生活和社会发展紧密关联。数学是自然科学的重要基础，并且在社会科学中发挥越来越大的作用，随着现代科学技术特别是计算机科学、人工智能的迅猛发展，数学的研究与应用领域得到极大的拓展。数学直接为社会创造价值，推动社会生产力的发展。

数学素养是现代社会每一个人都应该具备的基本素养，在形成人的理性思维、科学精神、文化品格和促进人的全面发展的过程中发挥着不可替代的作用。

五年制高职数学课程是五年制高等职业教育各专业学生必修的一门公共基础课程，具有基础性、发展性、应用性和职业性等特点。

## （二）课程任务

五年制高职数学课程承载着全面贯彻党的教育方针、落实立德树人根本任务和培育新时代德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人的功能。

五年制高职数学课程的基本任务是帮助学生掌握现代生活、进一步学习和职业发展所必需的数学知识和技能、思想和方法；提升学生的数学素养，引导学生学会用数学眼光观察世界、用数学思维分析世界、用数学语言表达世界、用数学文化沟通世界；提升学生在继续学习和未来工作中运用数学知识和经验发现问题、运用数学的思想方法和工具解决问题的能力；鼓励学生探寻事物变化规律，弘扬科学精神和工匠精神，养成良好的道德品质，增强社会责任感；促进学生思维能力、实践能力、应用能力和创新意识的发展，形成正确的世界观、人生观和价值观，成为全面发展的高素质劳动者和技术技能人才。

## 二、学科核心素养与课程目标

### （一）学科核心素养

学科核心素养是育人价值的集中体现，是学生通过学科学习而逐步形成的正确价值观、必备品格和关键能力。数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现，是具有数学基本特征的思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现。五年制高职数学学科核心素养是五年制高等职业教育人才培养目标的具体体现，是践行社会主义核心价值观、培养学生社会责任意识的重要载体。

五年制高职数学学科核心素养包括直观想象、数学抽象、数学运算、逻辑推理、数据分析、数学建模、思想方法和数学精神。这些数学学科核心素养既相对独立又相互交融，是一个有机整体。

#### 1.直观想象

直观想象是指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化的思维形式，利用图形理解、分析和解决数学问题的心理过程。主要包括：借助空间图形认识事物的位置关系、形态变化与运动规律；利用图形描述和分析数学问题；利用数与形的联系，构建数学问题的直观模型，探索解决问题的思路。

直观想象是发现和提出问题、分析和解决问题的重要手段，是构建抽象模型、进行数学推理和运算、探索形成解题思路和方法的思维基础。

通过五年制高职数学课程的学习，学生能够形成基于几何直观的空间想象能力，获取借助直观想象感知与分析事物特征和关系的经验，养成运用图形和空间想象分析问题与解决问题的能力 and 思维品质。

#### 2.数学抽象

数学抽象是指舍去事物的一切物理属性，提取出数学研究对象的思维过程。数学抽象借助于数量关系和位置关系，在具体情境中抽象出事物的本质特征和规律，形成数学概念和结论，并用数学语言来描述。

数学抽象是数学的基本思想和方法，是形成和发展理性思维的重要基础，反映数学的本质特征，贯穿于数学的产生、发展和应用的全过程中，使得数学成为

高度概括、表达准确、结论一般和有序多级的科学体系。

通过五年制高职数学课程的学习，学生能够在具体情境中抽象出基本的数学概念和命题，积累从具体到抽象的基本活动经验，发展运用数学抽象思考问题和解决问题的能力，养成运用抽象思维分析问题与解决问题的意识和习惯。

### 3.数学运算

数学运算是指在明确运算对象的基础上，依据数学运算法则与公式对具体对象进行变形的演绎过程。主要包括识别运算对象，理解和掌握运算法则，探究运算思路，选择运算方法，设计运算程序，求得运算结果等。

数学运算是解决数学问题的基本手段之一，是数学精确性的基本保证。数学运算是一种演绎推理，也是计算机解决问题的基础。

通过五年制高职数学课程的学习，学生能够学会基本的运算法则和运算方法，发展数学运算的能力，提升借助数学运算分析问题和解决问题的能力，养成一丝不苟、勤于反思的品格。

### 4.逻辑推理

逻辑推理是指从一些事实和命题出发，依据推理规则获得其他命题的过程。主要包括两类：一类是从特殊到一般的推理，推理形式主要是归纳和类比；一类是从一般到特殊的推理，推理形式主要是演绎。

逻辑推理是获得数学结论和构建数学体系的重要手段，是数学严谨性的基本保证，是人们在数学活动中进行交流的理性思维品质和能力。

通过五年制高职数学课程的学习，学生能够掌握逻辑推理的一般方法，能通过逻辑推理把握事物之间的基本联系，形成条理清楚的思维能力和表达能力，养成敢于质疑、善于思考、严谨求实的品格。

### 5.数据分析

数据分析是指针对研究对象获取数据，运用统计方法对数据进行整理、分析和推断，形成关于研究对象的知识的过程。主要是通过数据收集、数据整理、信息提取、模型构建、数据计算、分析推断等获得结论。

数据分析是研究随机现象的重要数学手段，是处理大数据的主要数学方法。

通过五年制高职数学课程的学习，学生能够初步掌握数据分析的基本方法和策略，提升处理随机现象和数据的基本能力，基本形成借助数据分析发现规律和解决问题的能力，养成求真务实、敢于质疑的品格。

## 6.数学建模

数学建模是对现实问题进行数学抽象、用数学语言表达问题、用数学知识与方法构建模型解决问题的过程。主要是从实际问题出发，抽象出相关的数学模型，求解结论，验证结果，解决问题。

数学建模搭建了数学与现实世界的桥梁，是运用数学知识和数学方法解决实际问题的基本手段，也是推动数学发展的重要源动力。

通过五年制高职数学课程的学习，学生能够有意识地用数学语言表达现实世界，会模仿学过的数学模型解决实际问题，积累一定的数学实践经验，增强创新意识，养成勇于探索、敢于质疑、实事求是的品格。

## 7.思想方法

思想方法是建立在对数学知识和数学规律本质认识基础上的分析和解决问题的指导思想和科学方法，是在学习和运用数学知识过程中逐步形成的思维方式和处置能力。主要包括：从数学知识中发现并认识蕴含的具有普遍指导意义的观点，并能在认识活动和实践应用中反复运用；用数学语言表述事物的状态和关系，用数学方法进行推导、演算和分析，形成对问题的解释和判断。

思想方法是发现和提出问题、观察并思考问题、分析和解决问题的主要手段，是数学应用的重要基础，是推动科技发展和社会创新的力量源泉。

通过五年制高职数学课程的学习，学生能够掌握函数、方程、数形结合、分类讨论、化归、极限等数学思想方法，能将数学思想方法向专业和社会领域的实践与创新进行渗透和迁移，将数学作为一种基本工具来加以运用，增强策略意识，养成辩证思维、系统思维、工程思维等优秀品质。

## 8. 数学精神

数学精神是指人们通过数学学习活动所形成的思维方式、行为规范、价值取向、理想追求等意志品格的集中表征。主要包括三个层次：一是认识层次，主要表现为基于数学知识的实在性，客观地、逻辑地认识问题；二是气质层次，表现为从事数学活动时遵守科学规范，呈现出良好的行为规范和道德取向；三是价值层次，表现为数学求真、求善、求美，这是数学精神的科学成分和人文成分的融合与升华。

数学精神是弘扬社会主义核心价值观、塑造健全人格、培养优秀意志品质的重要法宝，是催生勤奋学习、刻苦钻研、一丝不苟、争先创优的内生动力，是高素质技术技能人才的必备品格。

通过五年制高职数学课程的学习，学生能够形成严密化、系统化、数学化等科学精神，形成自我完善、创新进取、团结协作等人文精神，形成家国情怀、民族自信、责任担当等时代精神，能将数学精神迁移到专业领域形成精益求精的工匠精神，养成求真、至善、臻美的品格。

### （二）课程目标

学生通过五年制高职数学课程的学习，能认识数学的科学价值、应用价值、文化价值和审美价值，提高数学学习的兴趣，增强学好数学的自信，养成良好的数学学习习惯，发展自主学习的能力；获得职业岗位、进一步学习以及未来发展所必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验，提高从数学角度发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力；树立善于思考、刻苦钻研、严谨求实、敢于质疑的科学精神，不断提升应用意识、实践能力和创新思维。

学生在学习数学和运用数学的过程中，能用马克思主义的立场、观点和方法正确认识问题、分析问题和解决问题，深刻理解精益求精大国工匠精神的内涵实质，激发技能报国的家国情怀和使命担当，不断提升直观想象、数学抽象、数学运算、逻辑推理、数据分析、数学建模、思想方法、数学精神等数学学科核心素养和终身可持续发展能力。

## 三、课程结构

五年制高职数学课程教学内容与学时的安排应以五年制高职数学课程的任务与目标为依据，符合数学知识的内在逻辑和人才培养方案要求，统筹就业、升学、学业质量评价等方面的关系。

### （一）课程模块

五年制高职数学课程由基础模块、拓展模块一和拓展模块二三部分构成。基础模块和拓展模块一秉持了五年一贯制理念，针对高素质技术技能人才对数学知识和能力的要求，有机整合初等数学和高等数学内容，突出代数、函数、几何、概率与统计、导数、微分、积分等数学知识；拓展模块二是帮助学生拓宽视野、提升数学应用意识、促进专业学习的内容，共有九个具有一定代表性的专题。

基础模块是必修内容；拓展模块一中设置了选择性必修内容及选修内容，选择性必修内容共有六章，必须从前四章中任选两章、后两章中任选一章作为必修内容，其余三章作为选修内容；拓展模块二是选修内容。选择性必修内容及选修内容，各校可根据学生的专业特点、兴趣爱好、毕业去向（升学、就业）等选择相应的内容供学生学习。

课程框架详见下表。

模块	内容	建议学时	备注
基础模块	集合与充要条件	11	必修内容
	不等式	10	
	函数	12	
	指数函数与对数函数	13	
	三角函数	18	
	数列	13	
	平面向量	12	
	直线与圆的方程	18	
	复数及其应用	13	

续表

模块	内容	建议学时	备注
基础模块	简单几何体	12	必修内容
	概率与统计初步	12	
	极限与连续	20	
	导数与微分	22	
	积分及其应用	22	
拓展模块一	排列组合与二项式定理	16	选择性必修内容
	逻辑代数初步	16	
	立体几何	16	
	圆锥曲线	16	
	线性代数初步	16	
	常微分方程	16	
	三角计算	17	选修内容
	统计	7	
	数据表格信息处理	16	
	算法与程序框图	13	
	坐标轴平移与参数方程	9	
	多元函数微分及其应用	12	
	二重积分及其应用	8	
	概率统计（续）	18	
无穷级数	10		
拓展模块二	数学文化专题	8	选修内容
	数学工具专题	8	
	数学建模专题	8	
	规划与评估专题	8	
	数学与土木建筑专题	8	
	数学与财经商贸专题	8	
	数学与信息技术专题	8	
	数学与装备制造专题	8	
	数学与现代科技专题	8	

## （二）学时安排

五年制高职数学课程的总学时数不少于 256 学时（16 学分）。其中 208 学时用于完成基础模块必修内容（13 学分），48 学时用于完成拓展模块一中的选择性必修内容（3 学分），用于拓展模块一、拓展模块二中选修内容的学时数由各校自行安排。

数学课程开设应不少于 6 个学期，建议第一、二学期每周开设 4 学时，第三、四、五、六学期每周开设 2 学时，其余学期的周学时数各校视相关专业具体情况确定。

# 四、课程内容

## （一）基础模块

### 1.集合与充要条件

#### 【内容与要求】

（1）集合及其表示：了解集合的概念；理解元素与集合之间的关系；了解空集、有限集和无限集的含义；掌握常用数集的表示符号，理解列举法、描述法等集合的表示方法。

（2）集合之间的关系：理解集合之间包含与相等、子集与真子集的含义；掌握集合之间基本关系的符号表示。

（3）集合的运算：理解两个集合的交集、并集；理解全集和补集的含义。

（4）充要条件：了解充分条件、必要条件、充要条件的概念；了解命题中的条件与结论及两者之间的关系。

#### 【教学提示】

教学中应以学生学过的数学内容为载体，以学生熟悉的情境和问题引入集合及有关概念，借助 Venn 图的直观性，帮助学生理解集合的包含关系和集合的运算；从命题的真假入手，帮助学生体会充分条件、必要条件和充要条件的意义。本单元概念多、符号多，教学中应及时进行归纳总结；对一些容易混淆的概念和符号，要进行对比、辨析，如子集与真子集， $0$ 、 $\{0\}$ 与 $\emptyset$ ， $\in$ 与 $\subseteq$ ，数学中的“或”

与生活中的“或”，充分条件与必要条件等的含义与区别。

教学中，可根据学生的实际情况采用自主学习、合作学习等多种方式组织教学，帮助学生逐步学会使用集合的语言简洁、准确地表述数学的研究对象，逐步学会用数学的语言表达和交流；帮助学生完成从初中阶段数学知识相对具体到五年制高职阶段数学知识相对抽象的过渡。

培养和提升学生的数学运算、逻辑推理、数学抽象和数学精神等核心素养。

### 【参考案例】

例1 已知集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{1, 2, 4, 5\}$ ，试求  $A \cap B$  和  $A \cup B$ 。

分析：本案例主要考查学生对集合间交、并运算的理解及运算情况。

例2 已知集合  $A = \{x | x^2 - ax - 3 = 0\}$ ， $B = \{3\}$ ，且  $B \subseteq A$ ，试求实数  $a$  的值。

分析：本案例主要考查学生对集合间包含关系及描述法表示的集合意义的理解，并考查学生的运算能力。

## 2. 不等式

### 【内容与要求】

(1) 不等式的基本性质：了解不等式的基本性质，掌握用“作差法”判断两个实数或两个代数式值的大小。

(2) 区间：理解区间的概念。

(3) 一元二次不等式：理解一元二次不等式及其解集的概念，了解一元二次不等式解集的几何意义，掌握一元二次不等式的解法。

(4) 含绝对值的不等式：了解  $|x| < a$  和  $|x| > a (a > 0)$  的含义；掌握形如  $|ax + b| < c$  和  $|ax + b| > c (c > 0)$  的含绝对值不等式的解法。

(5) 不等式的应用：初步掌握从实际问题中抽象出一元二次不等式模型解决问题的方法。

### 【教学提示】

教学中要注意与初中不等式内容的衔接，以学生学过的数学内容为载体，在复习的基础上进行新知识的教学。

教学中可从实际问题入手，依据实数的性质，通过比较两个实数的大小引出“作差法”，帮助学生理解不等式的基本性质；引导学生借助一元二次方程的

根和二次函数的图象求解一元二次不等式；借助绝对值的几何意义，帮助学生理解求含绝对值不等式解集的方法，引导学生体会等价转化思想；选择学生熟悉的实例，引导学生体会不等式在日常生产生活中的应用，了解通过数学建模解决实际问题的步骤和方法。

培养和提升学生的数学运算、直观想象、逻辑推理、思想方法和数学建模等核心素养。

#### 【参考案例】

例 1 解不等式  $|2x+1| < 5$ 。

分析：本案例主要考查学生对含绝对值不等式的理解及运算情况。

例 2 已知一元二次方程  $x^2 - ax + 1 = 0$  有两个不相等的实数根，求实数  $a$  的取值范围。

分析：本案例主要考查学生对一元二次方程根的判别式及一元二次不等式解法的掌握情况。

### 3. 函数

#### 【内容与要求】

(1) 函数的概念：理解用集合语言 and 对应关系定义的函数概念。

(2) 函数的表示方法：理解表示函数的解析法、列表法和图象法；理解分段函数的概念。

(3) 函数的单调性和奇偶性：理解增函数、减函数、奇函数、偶函数的定义及函数图象的几何特征；初步掌握函数单调性和奇偶性的判定方法。

(4) 函数的应用：初步掌握从实际问题中抽象出分段函数模型解决简单实际问题的方法。

#### 【教学提示】

教学中可引导学生在初中函数知识的基础上，由熟悉的情境引出两个变量的对应关系，用集合语言 and 对应关系描述函数概念，并认识函数的定义域 and 对应法则两个要素；通过具体实例，帮助学生认识函数的三种表示方法；通过实际问题，帮助学生理解分段函数的含义；通过熟悉的函数图象，帮助学生理解函数的单调性和奇偶性，掌握函数单调性和奇偶性的判定方法，并引导学生正确使用符号语言刻画函数的单调性和奇偶性；通过解决生活中的简单函数问题，提高学生

数学应用意识。

教学中可组织学生收集并阅读函数形成和发展的相关资料，帮助学生从变量之间的依赖关系、集合之间的对应关系、函数图象，整体认识函数概念。

培养和提升学生的直观想象、逻辑推理、数学抽象、数学建模和数学精神等核心素养。

**【参考案例】**

例 1 已知函数  $f(x)$  由下表给出，则  $f(4)$  的值为\_\_\_\_\_。

$x$	1	2	3	4	5
$f(x)$	6	5	4	3	2

分析：本案例主要考查学生对列表法表示函数的理解。

例 2 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数，且是减函数，若  $a+b>0$ ，则 ( )

- A.  $f(a)>f(b)$                       B.  $f(a)<f(b)$   
C.  $f(a)+f(b)>0$                     D.  $f(a)+f(b)<0$

分析：本案例主要考查学生对函数单调性及奇偶性的理解，并考查学生的逻辑推理能力。

#### 4.指数函数与对数函数

**【内容要求】**

(1) 实数指数幂：理解  $n$  次根式、分数指数幂、有理数指数幂及实数指数幂的概念；掌握实数指数幂的运算法则。

(2) 指数函数：理解指数函数的定义、图象和性质。

(3) 对数的概念：理解对数的概念及性质；了解常用对数与自然对数的表示方法；理解对数式与指数式的关系。

(4) 对数的运算：了解积、商、幂的对数及运算法则。

(5) 对数函数：了解对数函数的定义、图象和性质。

(6) 指数函数与对数函数的应用：初步掌握从实际情境中抽象出指数函数、

对数函数模型解决简单实际问题的方法。

**【教学提示】**

教学中可引导学生从复习正整数指数幂开始，了解幂指数从正整数到有理数再到实数的拓展过程，从而理解实数指数幂；引导学生认识指数式与对数式的对应关系；利用计算工具进行实数指数幂和对数的运算；利用“描点法”画出指数函数与对数函数的图象，直观感知它们的变化规律；引导学生运用指数函数或对数函数解决简单的实际问题。

教学中可借助计算机软件画出指数函数与对数函数的图象，帮助学生总结图象的特征，加深对函数变化规律的认识。

培养和提升学生的数学运算、直观想象、数学抽象和数学建模等核心素养。

**【参考案例】**

例 1 已知函数  $y = \log_7 x$ ，下列说法正确的是 ( )

- A. 定义域为  $(-\infty, +\infty)$
- B. 值域为  $(0, +\infty)$
- C. 当  $x > 1$  时， $y < 0$
- D. 在定义域内单调递增

分析：本案例主要考查学生对对数函数性质的理解。

例 2 若实数  $x$  满足  $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ ，求函数  $y = 2^x$  的值域。

分析：本案例主要考查学生对一元二次不等式的解法及指数函数性质的理解，并考查学生的运算能力。

## 5. 三角函数

**【内容要求】**

(1) 角的概念的推广：了解正角、负角和零角的含义；了解象限角、终边相同角的概念及判定方法。

(2) 弧度制：了解 1 弧度的定义及弧度制；掌握角度制与弧度制的互化，了解弧度制下的弧长公式和扇形面积公式。

(3) 任意角的正弦函数、余弦函数和正切函数：理解任意角的正弦函数、余弦函数和正切函数的定义，理解任意角的正弦函数、余弦函数、正切函数值的符号与角的终边所在位置的关系，掌握特殊角的正弦值、余弦值和正切值。

(4) 同角三角函数的基本关系：理解同角三角函数的平方关系和商数关系。

(5) 诱导公式：了解终边相同角、终边关于原点对称角、终边关于坐标轴对称角的正弦函数、余弦函数和正切函数的诱导公式，了解利用计算工具求任意角三角函数值的方法。

(6) 正弦函数的图象和性质：理解正弦函数在 $[0,2\pi]$ 上的图象及其特征，掌握用“五点法”作正弦函数在 $[0,2\pi]$ 上的简图，理解正弦函数的单调性与奇偶性，理解正弦函数的图象及周期性。

(7) 余弦函数的图象和性质：了解余弦函数在 $[0,2\pi]$ 上的图象及其特征，掌握用“五点法”作余弦函数在 $[0,2\pi]$ 上的简图，了解余弦函数的单调性、奇偶性，了解余弦函数的图象、周期性，了解余弦函数图象与正弦函数图象的关系。

(8) 已知三角函数值求角：了解由特殊的三角函数值求 $[0,2\pi]$ 范围内的角的方法；了解由三角函数值求符合条件的角的方法。

#### 【教学提示】

教学中可引导学生通过熟悉的情境感知推广角的必要性；用集合语言表示终边相同的角；类比其他度量制加深对弧度制的理解；借助单位圆加深对任意角三角函数定义的理解；利用三角函数的定义或借助单位圆得到同角三角函数的基本关系和诱导公式；借助“五点法”绘制正弦函数、余弦函数在 $[0,2\pi]$ 上的图象，由正弦函数、余弦函数的图象领会性质；借助图象的平移感知余弦函数的图象与正弦函数图象的关系；结合计算工具和诱导公式，由已知三角函数值求符合条件的角。

教学中可引导学生借助几何直观和代数运算研究三角函数的周期性、对称性和单调性。

培养和提升学生的数学运算、逻辑推理、思想方法、数学抽象和数学精神等核心素养。

#### 【参考案例】

例 1 已知角 $\alpha$ 的终边经过点 $P(5,-12)$ ，求 $\sin\alpha$ ， $\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$ 的值。

分析：本案例主要考查学生对任意角的三角函数定义的理解。

例 2 若 $\alpha$ 是第三象限角， $\sin\alpha = 2x - 3$ ，则 $x$ 的取值范围是\_\_\_\_\_。

分析：本案例主要考查学生对正弦函数性质的理解，并考查学生不等式的求解。

## 6. 数列

### 【内容与要求】

(1) 数列的概念：理解数列的概念和表示方法，了解数列是一种特殊函数。

(2) 等差数列：理解等差数列的概念；了解等差数列前  $n$  项和公式的推导过程；掌握等差数列的通项公式及前  $n$  项和公式。

(3) 等比数列：理解等比数列的概念；了解等比数列前  $n$  项和公式的推导过程；掌握等比数列的通项公式及前  $n$  项和公式。

(4) 数列的应用：初步掌握从实际情境中抽象出等差数列和等比数列模型解决简单实际问题的方法。

### 【教学提示】

教学中可从学生熟悉的实例中归纳出数列及相关概念，引导学生分析数列项的序号与项的对应关系，理解数列通项公式的意义；帮助学生分析等差数列、等比数列的特点，归纳等差数列的通项公式，并类比得出等比数列的通项公式；引导学生用倒序相加法推导等差数列前  $n$  项和公式，用错位相减法推导等比数列前  $n$  项和公式。

教学中，可引导学生体会等差数列与一次函数、等比数列与指数函数的关系，通过具体实例（如银行储蓄、人口增长等）抽象出等差数列和等比数列模型，解决生产生活中的简单实际问题。

培养和提升学生的数学运算、逻辑推理、数学抽象、思想方法和数学建模等核心素养。

### 【参考案例】

例 1 等差数列  $\{a_n\}$  中， $a_1 = -2$ ， $a_5 = 4$ ，求  $\{a_n\}$  的通项公式。

分析：本案例主要考查学生对等差数列的公差及通项公式的理解。

例 2 等差数列  $\{a_n\}$  中， $a_4 = 10$ ，且  $a_3$ ， $a_6$ ， $a_{10}$  成等比数列，求数列  $\{a_n\}$  前 20 项的和  $S_{20}$ 。

分析：本案例主要考查学生对等差数列的通项公式和前  $n$  项和公式的理解，

要求学生熟悉等比中项的概念。

## 7.平面向量

### 【内容与要求】

(1) 平面向量的概念：了解平面向量、有向线段等概念，了解单位向量、零向量、相等向量、相反向量和共线向量的含义。

(2) 平面向量的线性运算：理解向量的加法、减法和数乘运算及其几何意义，了解平面向量的基本定理。

(3) 平面向量的内积：理解平面向量内积的概念、运算和性质，了解平面向量内积的几何应用。

(4) 平面向量的坐标表示：理解向量的坐标表示，理解向量坐标的加法、减法、数乘和内积运算，初步掌握向量坐标运算的几何应用。

### 【教学提示】

教学中可引导学生在熟悉的情境中，分析、提炼向量的两个要素，了解向量的概念；用位移、力、速度等物理量帮助学生理解相反向量、向量的加法和减法；引导学生从“数”和“形”两个方面感知两个向量平行的条件；用物理上力的做功说明向量的内积，帮助学生感知向量内积的性质。

教学中注意把握向量运算与实数运算之间的区别，引导学生运用类比的方法探索向量运算与实数运算的差异，经历用向量方法解决简单的平面几何问题、力学问题及其他实际问题的过程，体会向量是一种解决实际问题的工具。

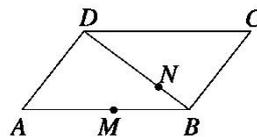
培养和提升学生的直观想象、数学运算、数学抽象和逻辑推理等核心素养。

### 【参考案例】

例1 设平面向量  $\mathbf{a} = (3, 5)$ ， $\mathbf{b} = (-2, 1)$ ，求：(1)  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ；(2)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 。

分析：本案例主要考查学生向量坐标运算的掌握情况。

例2 如图，在平行四边形  $ABCD$  中，点  $M$  是  $AB$  的中点，点  $N$  在  $BD$  上，且  $BN = \frac{1}{3}BD$ 。



(1) 用  $\overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AD}$  表示  $\overrightarrow{MN}$ ；

(2) 求证： $M$ 、 $N$ 、 $C$  三点共线。

分析：本案例主要考查学生利用向量解决简单的平面几何问题的能力。

## 8. 直线与圆的方程

### 【内容与要求】

(1) 两点间距离公式和线段的中点坐标公式：掌握两点间的距离公式与线段的中点坐标公式。

(2) 直线的倾斜角与斜率：理解直线的倾斜角与斜率的概念；掌握过两点的直线斜率的计算公式。

(3) 直线的点斜式和斜截式方程：掌握直线的点斜式和斜截式方程。

(4) 直线的一般式方程：了解直线的一般式方程；理解直线的点斜式方程化为一般式方程的方法，理解直线的斜截式方程与一般式方程之间的互化。

(5) 两条相交直线的交点：掌握通过解方程组求两条直线交点坐标的方法。

(6) 两条直线平行的条件：理解两条直线平行的条件及其判定方法。

(7) 两条直线垂直的条件：理解两条直线垂直的条件及其判定方法。

(8) 点到直线的距离公式：掌握点到直线的距离公式。

(9) 圆的方程：了解圆的定义；掌握圆的标准方程，了解圆的一般方程。

(10) 直线与圆的位置关系：理解直线与圆的位置关系及判定方法，初步掌握直线与圆相交时弦长的求法及圆的切线方程的求法。

(11) 直线与圆的方程的应用：初步掌握用直线方程与圆的方程解决实际问题的方法。

### 【教学提示】

教学中可引导学生在直角坐标系中借助勾股定理，给出两点间的距离公式和线段的中点坐标公式；利用图象帮助学生理解倾斜角的定义和斜率的概念，直观感受斜率随倾斜角变化而改变，经历用代数方法刻画直线斜率的过程，掌握过两点的直线斜率的计算公式；分析直线点斜式方程、斜截式方程的几何特征，帮助学生树立数形结合的思想；利用斜率判断两直线的位置关系，帮助学生理解斜率在研究直线中的重要作用；引导学生分析圆的标准方程的结构特征，理解圆心坐标、圆的半径与圆的标准方程之间的对应关系；在平面直角坐标系中，通过比较圆心到直线的距离与圆的半径的大小关系，帮助学生理解直线与圆的位置关系。

教学中应充分发挥信息技术的作用，通过计算机软件的作图功能帮助学生理解曲线与方程的关系；运用平面解析几何方法解决简单的数学问题和实际问题，

感悟平面解析几何中蕴含的数学思想。

培养和提升学生的数学运算、直观想象、逻辑推理、数学抽象和思想方法等核心素养。

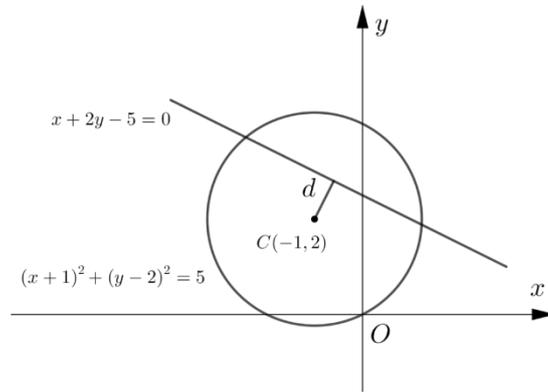
**【参考案例】**

例 1 求经过点  $P(2,-3)$ , 倾斜角为  $45^\circ$  的直线方程。

分析: 本案例主要考查学生对斜率公式、直线点斜式方程的理解情况。

例 2 已知直线  $l: x+2y-5=0$  和圆  $C: (x+1)^2+(y-2)^2=5$ , 求:

- (1) 直线  $l$  被圆  $C$  截得的弦  $AB$  的弦心距  $d$ ;
- (2) 弦长  $|AB|$ 。



分析: 本案例主要考查学生对直线与圆的位置关系及直线与圆相交弦长的理解, 并考查学生的运算能力。

## 9.复数及其应用

**【内容与要求】**

(1) 复数的概念: 了解引进复数的必要性, 理解虚数单位和复数的概念; 了解复数的代数形式, 理解共轭复数的概念, 初步掌握两个复数相等的充要条件。

(2) 复数的代数运算: 理解复数代数形式的加、减、乘、除四则运算。

(3) 复数的几何意义及三角形式: 了解复数的几何意义, 了解复数加法和减法运算的几何意义; 理解复数模和辐角的概念, 理解复数的三角形式。

(4) 棣莫弗定理与欧拉公式: 了解复数三角形式的乘除运算, 了解复数的指数形式, 了解棣莫弗定理和欧拉公式。

(5) 复数的应用: 了解复数范围内实系数一元二次方程的解法。

### 【教学提示】

教学中可利用一元二次方程的求解帮助学生体会引入虚数单位的必要性,理解复数及相关概念;通过类比合并同类项、多项式乘法运算、分母有理化,引导学生理解复数代数形式的加、减、乘、除四则运算;结合复数的几何表示,介绍复数的其他表示形式。

教学中可通过介绍数系的扩充历程,帮助学生厘清实数、虚数、复数的关系;通过数学文化的融入,发展学生的理性思维。

培养和提升学生的数学抽象、数学运算、逻辑推理和数学精神等核心素养。

### 【参考案例】

例 1 当  $m(m \in \mathbf{R})$  取何值时,复数  $(3m+2)+(m-2)i$  ( $i$  为虚数单位) 是: (1) 实数; (2) 虚数; (3) 纯虚数?

分析: 本案例主要考查学生对复数概念的理解及运算能力。

例 2 在复数范围内解方程  $x^2 + x + 6 = 0$ 。

分析: 本案例主要考查学生在复数范围内求解实系数一元二次方程的能力,并考查学生的运算能力。

## 10. 简单几何体

### 【内容与要求】

(1) 三视图: 理解实物或空间图形的正视图、俯视图、左视图,理解三视图所表达的简单几何体。

(2) 空间图形的画法: 初步掌握空间图形直观图的斜二测画法。

(3) 直棱柱、正棱锥的表面积: 了解棱柱、棱锥的结构特征,理解多面体及棱柱、棱锥的有关概念;理解直棱柱、正棱锥的侧面展开图;掌握直棱柱、正棱锥的侧面积公式。

(4) 圆柱、圆锥、球的表面积: 了解圆柱、圆锥、球的结构特征,理解旋转体及圆柱、圆锥、球的有关概念;理解圆柱、圆锥的侧面展开图;掌握圆柱、圆锥的侧面积公式;了解球的表面积公式。

(5) 柱、锥、球的体积: 理解柱体、锥体的体积公式,了解球的体积公式。

### 【教学提示】

教学中借助实物模型或利用计算机软件呈现简单几何体,帮助学生感知相关

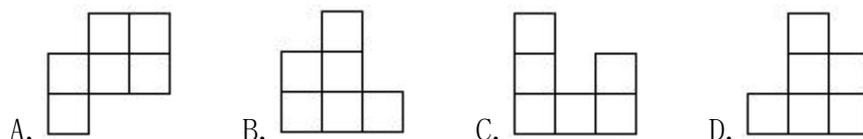
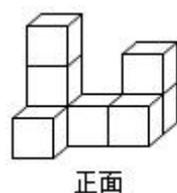
概念；选取简单几何体（如直棱柱、正棱锥）帮助学生掌握三视图和空间图形的画法，进一步绘制简单组合体的平面图；通过直棱柱、正棱锥、圆柱、圆锥的平面展开图，引导学生推导它们的侧面积公式；通过实验，帮助学生理解柱体、锥体的体积公式；结合实例，加强对柱、锥、球的表面积和体积公式的理解及应用。

教学中可以帮助学生在初中平面几何的基础上，进一步认识空间几何图形，借助信息技术直观感知简单几何体的性质。

培养和提升学生的直观想象、数学运算、思想方法和数学精神等核心素养。

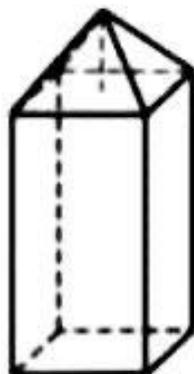
**【参考案例】**

例 1 如图是由八个相同小正方体组成的几何体，则其主视图是（ ）



分析：本案例主要考查学生观察和想象能力以及对三视图的理解。

例 2 复兴号是我国自主研发的新一代高速列车，为保护生态环境，控制路基沉降，复兴号运行的高架需要搭建如图所示桥桩，桥桩顶部是底面边长为 4m、高为 3m 的正四棱锥，其余部分是高为 10m 的正四棱柱。已知每立方米桥桩需 2.4 吨混凝土，浇筑一根这样的桥桩需多少吨混凝土？



分析：本案例主要考查学生直观想象、数学运算和解决简单实际问题的能力。

## 11. 概率与统计初步

### 【内容与要求】

(1) 随机事件：理解随机现象、随机事件的概念，了解事件发生的频率与概率的区别与联系。

(2) 古典概型：理解古典概型，初步掌握古典概型概率的计算方法。

(3) 概率的简单性质：了解互斥事件的概念，初步掌握互斥事件的概率加法公式。

(4) 抽样方法：了解统计的基本思想，理解总体、个体、样本和样本容量等概念，理解简单随机抽样、系统抽样和分层抽样的概念，了解抽样方法的应用。

(5) 统计图表：了解频率分布表和频率分布直方图等数据可视化描述方法，了解选择恰当的统计图表对数据进行分析的方法。

(6) 样本的均值和标准差：理解样本均值、方差和标准差的含义，掌握样本均值、方差和标准差的计算方法。

### 【教学提示】

教学中可以创设情境，通过生活中的具体案例帮助学生感知随机事件的真实存在，了解随机事件及概率的意义，认识古典概型的特征，了解互斥事件，适当介绍利用计数方法计算古典概型中的概率。根据实际问题，引导学生认识简单随机抽样、系统抽样和分层抽样的特点，选择恰当的抽样方法获取数据、分析数据，理解数据中蕴含的信息，并采用适当的统计图表描述数据，使数据直观可视。结合实例，帮助学生理解样本的均值、方差和标准差的含义并掌握计算方法。

教学中可通过实践活动增强学生对概率与统计的理解，引导学生借助计算工具计算数据的均值、方差和标准差，并利用这些数据特征和数据直观图表进行数据分析；通过实际操作、计算机模拟操作等活动，帮助学生积累数据分析的经验。

培养和提升学生的数据分析、直观想象、逻辑推理、数学建模和数学精神等核心素养。

### 【参考案例】

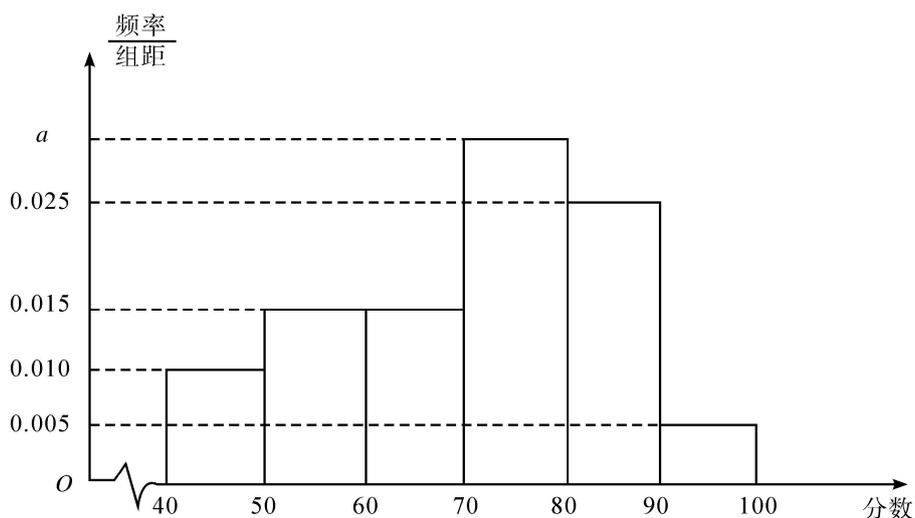
例 1 射箭比赛中，一名选手射中 10 环的概率为 0.3，射中 9 环的概率为 0.4，那么他射中的环数超过 8 环的概率是多少？

分析：本案例主要考查学生对互斥事件的理解及概率加法公式的运用。

例2 为弘扬传统文化，某校举办了诗词大赛。现将抽取的200名学生的成绩从低到高依次分成六组： $[40, 50)$ ， $[50, 60)$ ， $[60, 70)$ ， $[70, 80)$ ， $[80, 90)$ ， $[90, 100)$ ，得到频率分布直方图。试解答下列问题：

(1) 求 $a$ 的值；

(2) 若采用分层抽样的方法从6个小组中随机抽取40人，则应从第1组和第2组各抽取多少人？



分析：本案例主要考查学生对频率分布直方图的特征以及分层抽样的理解与应用，并考查学生的计算能力。

## 12. 极限与连续

### 【内容与要求】

(1) 初等函数：了解基本初等函数的常见特征，了解基本初等函数类型；理解复合函数的定义；理解初等函数的定义。

(2) 数列的极限：理解数列极限的定义，掌握常见数列极限的求法。

(3) 函数的极限：理解函数极限的定义，了解函数极限的性质；理解函数极限的运算法则，掌握常见函数的极限求法。

(4) 两个重要极限：了解两个重要极限，理解利用两个重要极限解决两类常见极限问题的方法。

(5) 无穷小：了解无穷小与无穷大的概念；了解无穷小比较的概念，理解利用等价无穷小求极限的方法。

(6) 函数的连续性：了解增量的概念；理解函数连续的概念及条件，了解连续函数的性质；了解函数间断点及分类，了解函数间断点的求法。

### 【教学提示】

教学中可以适当从数学史与数学思想演变的角度来介绍极限思想的产生及发展过程，引导学生体验和感悟极限思想，把握极限思想的内涵，进而加深对极限概念的理解。

教学中可尽量将极限直观呈现，借助 GeoGebra、Matlab 等教学软件，帮助学生更加直观地感受极限思想中“无限趋近”这一过程。

培养和提升学生的数学抽象、数学运算、思想方法、数学精神等核心素养。

### 【参考案例】

例 1 求  $\lim_{x \rightarrow 5} (x^2 + x - 1)$ 。

分析：本案例主要考查学生对极限运算法则的掌握及运用情况。

例 2 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{x}}$ 。

分析：本案例主要考查学生对复合函数极限运算法则的掌握情况。

## 13. 导数与微分

### 【内容与要求】

(1) 导数的概念与运算：了解导数概念的背景，理解导数的概念和几何意义；掌握基本初等函数的求导公式；理解函数的和、差、积、商的求导法则；了解复合函数的求导法则；了解高阶导数的概念和二阶导数的计算方法。

(2) 函数的微分：理解微分的概念及微分与导数的关系，了解微分的几何意义；掌握基本初等函数的微分公式与微分运算法则。

(3) 中值定理与洛必达法则：了解拉格朗日中值定理，了解  $\frac{0}{0}$  和  $\frac{\infty}{\infty}$  两种未定式的洛必达法则。

(4) 导数与微分的应用：理解函数单调性的判定方法；理解函数极值的概念，掌握判断函数极值的一般步骤，掌握求函数最值的方法；了解曲线凹凸与拐点的概念，了解曲线凹凸性的判定与曲线拐点的求法；了解渐进线的概念；了解描绘函数图象的一般方法；了解导数与微分的典型应用案例。

### 【教学提示】

教学中应注意既要根据学生认知经验创设丰富的教学情境，又要通过问题

引导学生体会导数的本质就是函数相对变化率的极限。

教学中要注重数形结合，通过信息技术与内容的有机整合，使抽象的知识直观化。例如，通过演示平均变化率向瞬时变化率“无限趋近”的数值变化过程，帮助学生理解两者间的内在联系。

培养和提升学生的数学抽象、数学运算、思想方法、数学精神等核心素养。

#### 【参考案例】

例1 求曲线  $y = x^4 - 2x^3 + x + 3$  的一阶导数与二阶导数。

分析：本案例主要考查学生对基本初等函数求导公式与导数的四则运算法则的理解与运算能力。

例2 求曲线  $y = x^4 - 2x^3 + x + 3$  的凹凸区间与拐点。

分析：本案例主要考查学生对曲线凹凸性判断与拐点计算的掌握情况。

### 14.积分及其应用

#### 【内容与要求】

(1) 不定积分的概念与基本公式：了解原函数的概念，理解不定积分的概念与性质，掌握基本积分公式。

(2) 定积分的概念与性质：了解曲边梯形面积的求法，理解定积分的概念，了解定积分的几何意义与物理意义，理解定积分的性质。

(3) 微积分基本定理：理解微积分基本定理。

(4) 积分基本运算法则：理解积分基本运算法则。

(5) 换元积分法：理解第一类换元积分法，了解第二类换元积分法。

(6) 分部积分法：了解分部积分法。

(7) 积分的应用：了解定积分在求平面图形面积、旋转体体积等方面的应用。

#### 【教学提示】

教学中要由原函数引出不定积分的概念。以求曲边梯形面积为例，引导学生体会以“直”代“曲”、近似求和、取极限的思想方法，揭示定积分由整体到局部，再由局部到整体的辩证思维。

教学中要注重创设问题情境，在解决实际问题的过程中，引导学生理解抽象概念的形成过程，形成定积分的概念；通过利用定积分计算三角形、平行四边

形等图形的面积，引导学生体会定积分的意义；关注积分概念的实际背景；加强基本积分方法的教学，通过适量的练习培养学生的解题能力，引导学生运用定积分解决简单的实际问题。

培养和提升学生的数学抽象、数学运算、思想方法、数学建模等核心素养。

### 【参考案例】

例 1 求不定积分  $\int \left( \frac{x}{2} + \frac{2}{x} \right) dx$ 。

分析：本案例主要考查学生对基本积分公式的掌握情况与运算能力。

例 2 求由曲线  $y = x^2$  和  $y = 2 - x^2$  所围成图形分别绕  $x$  轴和  $y$  轴旋转而成的旋转体的体积。

分析：本案例主要考查学生对定积分几何意义的理解及利用定积分计算旋转体的体积。

## （二）拓展模块一

### 15.排列组合与二项式定理

#### 【内容与要求】

（1）分类、分步计数原理：理解分类计数原理和分步计数原理，掌握用两个计数原理解决实际问题的方法。

（2）排列与排列数公式：理解排列及排列数的概念，理解生活中的简单排列问题，了解排列数公式的推导过程。

（3）组合与组合数公式：理解组合及组合数的概念，理解排列问题与组合问题的区别，了解组合数公式的推导过程和组合数的性质。

（4）排列组合的应用：初步掌握用排列组合解决简单实际问题的方法。

（5）二项式定理：了解二项式定理的推导过程及二项展开式的特征，理解二项展开式的通项公式及二项式系数的性质，初步掌握用二项式定理解决与二项展开式有关的简单问题的方法。

#### 【教学提示】

教学中可结合具体情境，帮助学生理解计数问题通常可归结为分类和分步

两类问题，引导学生学会利用计数原理分析和解决问题；通过学生熟悉的实例，帮助学生理解排列与组合的概念，结合两个计数原理推导排列数公式、组合数公式和二项式定理。

教学中可结合杨辉三角，帮助学生感知二项式系数的特征，并注意区分二项式系数与项的系数。

培养和提升学生的数学运算、逻辑推理、数学抽象和思想方法等核心素养。

#### 【参考案例】

例 1 求  $(1-x)^5$  展开式的各项系数。

分析：本案例主要考查学生对二项式系数的理解及运算情况。

例 2 已知  $\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right)^n$  展开式中只有第 6 项二项式系数最大。

(1) 求  $n$  的值；(2) 展开式中的常数项是多少？

分析：本案例主要考查学生对二项式系数及其性质的理解，并考查学生的运算能力。

### 16.逻辑代数初步

#### 【内容与要求】

(1) 二进制及其转换：了解二进制的概念，理解二进制的按权展开式。

(2) 命题逻辑与条件判断：理解命题的概念，理解常用的逻辑联结词的含义。

(3) 逻辑变量与基本运算：理解逻辑变量的概念，初步掌握逻辑变量的“与”“或”“非”运算以及三者间的混合运算。

(4) 逻辑式与真值表：理解逻辑式与真值表的概念。

(5) 逻辑运算律：了解逻辑运算律，初步掌握逻辑式的化简方法。

#### 【教学提示】

教学中要从学生比较熟悉的、结构比较简单的问题或情境入手。在二进制数的教学中，可以用学生熟悉的十进制数类比研究二进制数，提升学生合理猜想的能力。通过介绍二进制数产生的历史背景，渗透数学文化，激发学生对数学的情感。创设问题情境，让学生领会命题的本质，理解逻辑联结词“或”“且”“非”的意义及真值表。通过学生熟悉的串并联电路，引入逻辑与运算、或运算、非运

算，并根据电路结果理解相应运算结果的合理性，加深学生对逻辑运算的理解。

教学中可根据专业特点，适当增加与专业相关的问题，加强数学与专业的融合教学，让学生体会数学的应用价值。

培养和提升学生的数学运算、逻辑推理、数据分析和数学精神等核心素养。

#### 【参考案例】

例 1 将十进制数 51 换算成二进制数： $(51)_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

分析：本案例主要考查将十进制数化成二进制数，同时考查学生的运算能力。

例 2 化简  $\overline{ABC} + \overline{AB}$ 。

分析：本案例主要考查学生运用逻辑运算律化简较复杂逻辑式的能力。

### 17. 立体几何

#### 【内容与要求】

(1) 平面的基本性质：了解平面的概念，理解平面性质的三个公理，了解空间中点、线、面关系的符号表示。

(2) 直线与直线的位置关系：理解空间中直线与直线的位置关系，理解异面直线的定义及判定方法，了解异面直线所成的角的概念，了解简单几何体中异面直线所成的角的求法。

(3) 直线与平面的位置关系：理解空间中直线与平面的位置关系，理解直线与平面平行、直线与平面垂直的判定定理和性质定理，了解直线与平面所成的角的概念，了解简单几何体中直线与平面所成的角的求法。

(4) 平面与平面的位置关系：理解空间中平面与平面的位置关系，了解二面角及二面角的平面角的概念，理解平面与平面平行、平面与平面垂直的判定定理和性质定理。

#### 【教学提示】

教学中可通过对身边物体的观察，抽象出平面的概念，进一步了解平面的画法和表示法，空间点、线、面之间的基本位置关系及其表示；通过实例引出三个公理及推论、平行公理和等角定理，并运用公理解释生活中的某些现象。通过立交桥、高铁轨道等实例引出异面直线概念，归纳出空间直线与直线的三种位置关系；根据异面直线所成角的定义，将空间问题转化为平面问题，让学生体会转

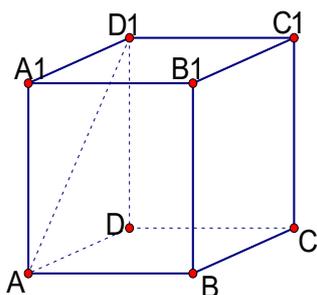
化的思想。借助实例，得到直线与平面之间的三种位置关系；通过观察、实践研究、思考交流，归纳出直线与平面平行、垂直的判定定理和性质定理；类比求异面直线所成角的方法求直线与平面所成的角。类比直线与平面的位置关系，探索平面与平面的位置关系，介绍二面角的概念，归纳出平面与平面平行、垂直的判定定理和性质定理。

教学中可借助实物模型，通过整体观察、直观感知、思辨论证、度量计算引导学生多角度、多层次揭示空间图形的本质，帮助学生完善思维结构、发展空间想象能力。

培养和提升学生的直观想象、逻辑推理、数学运算和数学精神等核心素养。

### 【参考案例】

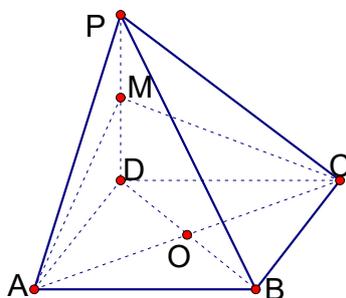
例 1 如图，已知  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  为正方体，求异面直线  $AD_1$  和  $BC$  所成的角。



分析：本案例主要考查学生对两条异面直线所成的角的理解。

例 2 已知点  $P$  是矩形  $ABCD$  所在平面外一点，矩形  $ABCD$  的对角线  $AC$ 、 $BD$  交于点  $O$ ， $M$  为  $PD$  的中点， $PD \perp$  平面  $ABCD$ ， $PD = AD$ 。

(1) 求证： $PB \parallel$  平面  $MAC$ ；(2) 求直线  $PA$  与平面  $ABCD$  所成的角。



分析：本案例主要考查学生证明直线与平面平行和求直线与平面所成角的能力。

## 18.圆锥曲线

### 【内容与要求】

(1) 椭圆：理解椭圆的概念及标准方程，初步掌握椭圆的几何性质及应用。

(2) 双曲线：理解双曲线的概念及标准方程，初步掌握双曲线的几何性质及应用。

(3) 抛物线：理解抛物线的概念及标准方程，初步掌握抛物线的几何性质及应用。

(4) 圆锥曲线的应用：初步掌握运用圆锥曲线的相关知识解决简单实际问题的方法。

### 【教学提示】

教学中在引入圆锥曲线的概念时，可通过丰富的实例（如拱形桥的截面、行星运行轨道等），帮助学生了解圆锥曲线的实际背景与具体应用；引导学生在直角坐标系中，类比圆的标准方程推导椭圆的标准方程，类比椭圆的标准方程推导双曲线的标准方程；组织学生自主探索，建立恰当坐标系，得到抛物线的标准方程，并创设情境引导学生得出圆锥曲线的统一定义；通过对圆锥曲线标准方程的分析，引导学生探索圆锥曲线的几何性质，体会用代数方法研究几何问题的思想方法。

教学中可利用现代信息技术，通过绘图工具作图，向学生演示方程中参数的变化对方程所表示的曲线的影响，帮助学生进一步理解曲线与方程的关系。

培养和提升学生的直观想象、数学运算、思想方法和数学建模等核心素养。

### 【参考案例】

例 1 若椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$  的离心率  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，求该椭圆的方程。

分析：本案例主要考查学生对椭圆的标准方程和几何特征的理解及运算能力。

例 2 已知抛物线  $C: y^2 = 4px (p > 0)$  的焦点在直线  $l: x - 2y - p^2 = 0$  上，求抛物线  $C$  的方程。

分析：本案例主要考查学生对抛物线的定义及几何特征的掌握情况。

## 19.线性代数初步

### 【内容与要求】

(1) 行列式初步：了解行列式的概念，了解行列式的基本性质，会计算二阶、三阶行列式。

(2) 矩阵的概念：理解矩阵的概念，了解三角矩阵、对角矩阵、单位矩阵、零矩阵及矩阵转置的概念。

(3) 矩阵的运算：理解矩阵的相等，理解矩阵的加法、减法、数乘、乘法运算，了解逆矩阵的概念。

(4) 线性规划初步：了解线性规划的有关概念，了解线性规划的图解法，了解用 Matlab 解线性规划问题的方法。

### 【教学提示】

教学中要充分利用生活中学生比较熟悉的、结构比较简单的实际问题或情境，帮助学生感知矩阵、行列式等概念，理解矩阵与行列式的关系；引导学生体会解决线性规划问题的思想方法。

教学中要注重与学生所学专业相联系，适当增加与专业相关的问题，用数学解决专业问题。

培养和提升学生的数学运算、逻辑推理、数学抽象、数学建模等核心素养。

### 【参考案例】

例 1 已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ , 求  $AB$ 。

分析：本案例主要考查学生对矩阵运算的理解与数学运算能力。

例 2 某公司计划在今年内同时出售变频空调机和智能洗衣机。由于这两种产品的市场需求量非常大，有多少就能销售多少，因此该公司要根据实际情况确定产品的月供应量，以使得总利润达到最大。通过调查，得到关于这两种产品的有关数据如下表：

成本与利润 \ 资金	单位产品所需资金		月资金供应量
	空调机	洗衣机	
成本/百元	30	20	300
劳动力工资/百元	5	10	110
单位利润/百元	6	8	

试问：怎样确定两种货物的月供应量，才能使总利润达到最大，最大利润是多少？

分析：本案例主要考查线性规划的相关概念、最优解的求法以及分析问题解决问题的能力。

## 20.常微分方程

### 【内容要求】

(1) 微分方程的基本概念：了解微分方程的概念，了解常微分方程的阶、特解、通解和初始条件的概念，能通过直接积分法求形如  $y^{(n)} = f(x)$  的微分方程的解。

(2) 一阶线性微分方程：了解可分离变量的微分方程、一阶线性微分方程的概念，了解一阶齐次和非齐次线性微分方程的区别，理解可分离变量的微分方程、一阶线性微分方程的求解过程。

(3) 二阶常系数齐次线性微分方程：了解二阶常系数齐次线性微分方程的概念，了解特征方程、特征根的概念，理解二阶常系数齐次线性微分方程的求解过程。

(4) 常微分方程的应用：了解应用微分方程模型解决简单实际问题的方法。

### 【教学提示】

教学中可根据具体问题或情境，引导学生理解微分方程的概念及类型；通过探究变量之间的函数关系，体会微分方程模型建立的过程；理解常微分方程的

求解方法，感知学习微分方程的必要性。对常数变易法、特征方程根的讨论只要求学生了解即可。

教学中要以微积分为载体，引导学生根据具体问题的实际背景以及所学的高等数学知识，建立含有所需求函数的导数或微分的关系式，通过找出所需求的函数引入微分方程的概念；比较一阶与二阶微分方程、通解与特解、齐次与非齐次之间的差别，归纳可分离变量的微分方程的解题步骤；理解一阶线性微分方程、二阶常系数齐次线性微分方程的求解过程；引导学生运用微分方程解决简单的实际问题。

培养和提升学生的数学抽象、数学建模、数学运算和数学精神等核心素养。

### 【参考案例】

例 1 求微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{4xy}{1+x^2}$  的通解。

分析：本案例主要考查可分离变量的微分方程的解法，通过分离变量、两边积分、求出积分得到通解。

例 2 求微分方程  $y'' - 6y' + 9y = 0$  满足初始条件  $y|_{x=0} = 0$  和  $y'|_{x=0} = 1$  的特解。

分析：本案例主要考查二阶常系数齐次线性微分方程的解法，通过求特征方程的根，得出微分方程的通解，再对通解求导后利用初始条件求出特解。

## 21.三角计算

### 【内容与要求】

(1) 和角公式：了解和角公式的推导过程；理解两角和与两角差的正弦公式、余弦公式在求值、化简及证明等方面的应用；了解两角和与两角差的正切公式在求值、化简及证明等方面的应用。

(2) 倍角公式：理解二倍角的正弦公式、余弦公式的推导过程及在求值、化简与证明等方面的应用；了解二倍角的正切公式的推导过程及在求值、化简与证明等方面的应用。

(3) 正弦型函数：了解正弦型函数与正弦函数之间的关系；初步掌握用“五点法”画正弦型函数在一个周期上的简图；理解正弦型函数的图象和性质。

(4) 解三角形：理解正弦定理和余弦定理，初步掌握用正弦定理和余弦定理理解三角形的方法。

(5) 三角计算的应用：初步掌握用三角计算解决简单实际问题的方法。

### 【教学提示】

教学中可借助单位圆、向量数量积推导两角差的余弦公式，通过角的代数变换和诱导公式推导两角和的余弦公式、两角和与差的正弦公式，通过商数关系推导两角和与差的正切公式。令两角和的正弦公式、余弦公式和正切公式中的两角相等，可得到二倍角公式。通过创设情境引入正弦型函数的定义，并用“五点法”作出具体的正弦型函数的图象，通过比较图象归纳  $A$ 、 $\omega$ 、 $\varphi$  三个参数对函数图象影响的一般规律，数形结合帮助学生研究正弦型函数的最大（小）值、周期性、单调性等性质。从学生已有的直角三角形边角关系出发介绍正弦定理、余弦定理及其简单应用，与专业课结合探究实际问题，形成综合运用三角知识解三角形的能力。

教学中力求联系原有三角函数知识，在公式推导和解题训练中让学生体会公式在求值、化简等方面的具体应用，提高学生的推理能力，渗透变换的思想。借助计算工具完成非特殊角的三角计算，用三角函数解决简单的实际问题，培养学生运算能力和数学应用意识。

培养和提升学生的数学抽象、数学运算、逻辑推理、数学建模和数学精神等核心素养。

### 【参考案例】

例 1 已知  $\cos\theta = \frac{3}{5}$ ， $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，求  $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ ， $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$  的值。

分析：本案例主要考查学生对两角和与差的余弦公式、正弦公式的理解。

例 2 在  $\triangle ABC$  中，已知  $a = 3$ ， $b = 2$ ， $C = \frac{\pi}{3}$ ，求  $c$  和  $B$ 。

分析：本案例主要考查学生用正弦定理和余弦定理解三角形的能力，并考查学生的运算能力。

## 22.统计

### 【内容与要求】

(1) 用样本估计总体：了解用样本数据估计总体的集中趋势参数和离散程度参数；了解样本估计总体的取值规律。

(2) 一元线性回归：了解样本线性相关关系和一元线性回归模型的含义；了解求一元线性回归方程的方法，初步掌握用一元线性回归模型进行预测的方法。

### 【教学提示】

教学中可选取学生熟悉的实例，引导学生感知用样本估计总体的必要性和科学性；利用样本数据，通过计算平均数、中位数、众数等估计总体的集中趋势参数，通过计算极差、标准差等估计总体的离散程度参数，帮助学生了解这些参数的统计含义；通过具体实例，帮助学生理解利用一元线性回归模型可以研究变量之间的随机关系并进行预测。

教学中可通过实际操作、计算机模拟等活动，帮助学生积累数据分析的经验。

培养和提升学生的数据分析、数学运算、数学建模和数学精神等核心素养。

### 【参考案例】

例1 甲、乙两人同时加工一种零件，在10天中两人每天加工出的次品数如下表：

第几天	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
甲	0	1	0	2	2	0	3	1	2	4
乙	2	3	1	1	0	2	1	1	0	1

分别计算他们这10天内次品数的均值和标准差。从计算结果来看，甲、乙两人谁的操作更稳定一些？

分析：本案例主要考查学生通过样本的数据估计总体特征的能力。

案例2 已知某厂家的销售额 $y$ （万元）与促销费 $x$ （万元）的一组统计数

据如下：

$x$	10	20	30	40	50	60
$y$	350	390	410	460	500	560

(1) 求  $y$  关于  $x$  的回归直线方程。

(2) 当促销费为 35 万元时，厂家销售额约为多少？

分析：本案例主要考查学生用一元线性回归模型进行计算和预测的能力。

### 23.数据表格信息处理

#### 【内容与要求】

(1) 数据表格、数组：理解数据表格和数组的概念，理解用数据表格、数组表达数据信息的作用。

(2) 数组的运算：掌握数字数组的加法、减法、数乘、内积运算法则，了解数组的运算律。

(3) 数据的图示：了解饼图、直方图、折线图的要素、结构特点及其在反映数据信息中的作用，了解制作饼图、直方图、折线图的步骤，了解 Excel 制图的步骤。

(4) 散点图及其数据拟合：了解散点图的结构及组成要素，了解数据拟合的概念。

(5) 用 Excel 处理数据表格：了解制作 Excel 数据表格的主要步骤，了解在 Excel 数据表格中进行数字数组的加、减、数乘、内积运算的操作步骤。

#### 【教学提示】

教学中可通过具体实例来呈现运用数据表格进行数据信息的分类、处理、分析的过程及方法，让学生在学习中充分感受、体验数据表格及数据图示的作用，认识到它们不仅能够记录信息、传递信息，而且还能够反映数据信息之间的内在联系，提高运用数据表格分析、解决问题的意识和能力。

教学中要尽可能地创造条件用计算器、计算机辅助教学，注意培养学生计算工具和计算机软件的操作与应用能力，帮助学生积累数据表格、数据图示分析

和处理的经验。

培养和提升学生的逻辑推理、数据分析、数学运算和数学建模等核心素养。

**【参考案例】**

例 1 已知数组  $a = (2, 1, 5)$ ,  $b = (3, -5, 4)$ ,  $c = (3, 5, -2)$ , 求:

(1)  $a + b + 2c$ ; (2)  $a \cdot b$ 。

分析: 本案例主要考查学生对数字数组的运算法则和运算律的理解及运算能力。

例 2 2018 年、2019 年、2020 年我国国民总收入、居民人均可支配收入与居民人均食品消费支出情况如下表:

项目	年份		
	2018 年	2019 年	2020 年
国民总收入/亿元	915243	983751	1008782
居民人均可支配收入/元	28228	30733	32189
居民人均食品消费支出/元	7239	7733	7881

(1) 我国国民总收入、居民人均可支配收入与居民人均食品消费支出 2020 年比 2019 年各提高了多少?

(2) 求 2018 年至 2020 年我国国民总收入、居民人均可支配收入与居民人均食品消费支出的年均增长率。

分析: 本案例主要考查学生对数据表格所反映的信息进行分析及解决生活中实际问题的能力。

## 24. 算法与程序框图

**【内容与要求】**

(1) 算法的概念: 了解算法的含义及表示方法, 理解变量的赋值及算法的基本概念。

(2) 程序框图: 了解流程图符号(起止框、输入输出框、判断框、处理框、

流程线等)的含义,理解顺序、选择、循环三种基本算法结构。

(3) 算法与程序框图应用举例:理解算法思想在解决简单实际问题中的应用。

**【教学提示】**

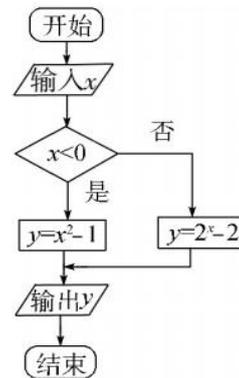
教学中可引导学生通过熟悉的实例归纳算法的相关概念,体验流程图在解决问题中的作用;通过日常生活和数学中的实例,帮助学生理解三种框图结构;在模仿、操作、探索等过程中学会利用三种结构解决简单问题;通过阅读中国古代经典算法案例,激发学生学习的积极性,帮助学生加深对算法的理解,培养学生从实际问题中抽象出算法模型的能力。

教学中可通过实例帮助学生体验算法的基本思想以及算法的重要性和有效性,发展学生的逻辑思维和数学表达能力,体会中国古代数学对世界数学发展的贡献,激发学生的爱国热情。

培养和提升学生的数学抽象、逻辑推理、数学建模、思想方法、数学精神等核心素养。

**【参考案例】**

例 1 执行如图所示的程序框图,若输入  $x$  的值为 2,则输出  $y$  的值为\_\_\_\_\_。



分析:本案例主要考查学生识别程序框图的能力。

例 2 用程序框图设计一个算法:输入三个实数  $a, b, c$ ,要求输出这三个数中最大的数。

分析:本案例主要考查学生的算法思维及程序框图设计能力。

## 25.坐标轴平移与参数方程

**【内容要求】**

1. 坐标轴平移:了解坐标轴平移的概念,掌握坐标轴平移的坐标变换公式,理解用坐标轴平移的坐标变换公式化简曲线方程的方法,了解坐标轴平移在生产生活中的应用。

2. 参数方程:了解参数方程的概念,理解简单曲线的参数方程的求法,理解简单的参数方程(如直线、圆的参数方程等)化为普通方程的方法,了解常用曲线的参数方程。

### 【教学提示】

教学中可通过在数控机床上加工工件时用到“工件坐标系”和“机床坐标系”情境或者类似情境，让学生感知坐标轴平移的重要性。通过设置问题情境，引入参数方程的概念。

教学中可采用数形结合的方式，推导、归纳坐标轴平移的坐标变换公式，体现数形结合和从特殊到一般的数学思想方法。

培养和提升学生的数学运算、逻辑推理、思想方法和数学抽象等核心素养。

### 【参考案例】

例1 已知点 $A$ 在原坐标系中的坐标是 $(-3,1)$ ，坐标轴平移后点 $A$ 的坐标变为 $(4,3)$ ，求新坐标系的原点在原坐标系中的坐标。

分析：本案例主要考查学生对坐标轴平移的坐标变换公式的掌握情况。

例2 已知动圆 $x^2 + y^2 - 2x \cos \theta - 2y \sin \theta = 0$  ( $\theta$ 是参数)，求圆心的轨迹方程。

分析：本案例主要考查学生对将参数方程化为一般方程的方法的理解及运算能力。

## 26.多元函数微分及其应用

### 【内容与要求】

(1) 多元函数的基本概念：了解空间直角坐标系的概念，了解二元函数的概念，了解二元函数的几何意义，了解简单二元函数的定义域。

(2) 多元函数的极限：了解二元函数的极限和连续的概念。

(3) 偏导数：了解偏导数的概念，了解二元函数偏导数的求法，了解全微分的概念。

### 【教学提示】

教学中可通过圆柱体积公式等具体案例抽象出二元函数的概念；通过研究二元函数的变化率引入偏导数的概念；通过创设问题情境，引导学生了解二元函数的全微分的概念。

教学中可用类比的方法学习多元函数微分学。通过类比一元函数的极限，

得到二元函数的极限；通过类比一元函数的求导方法，将求导公式和求导法则迁移到二元函数偏导数的计算上来。运用 Matlab 软件展示三维空间，得到三维空间中点的表示法，并帮助学生了解二元函数的图象。

培养和提升学生的直观想象、数学运算、数学抽象和思想方法等核心素养。

#### 【参考案例】

例 1 求函数  $z = x^2 + 2y^2 - xy$  的偏导数。

分析：本案例主要考查二元函数偏导数的概念和计算方法。

例 2 已知二元函数  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \ln xy$ ，求  $f(x, y)$  的微分。

分析：本案例主要考查偏导数的求法、微分的概念及数学运算能力。

## 27. 二重积分及其应用

#### 【内容要求】

(1) 二重积分的基本概念：了解曲顶柱体的概念，了解二重积分的概念、存在定理、几何意义，了解二重积分的性质。

(2) 二重积分的计算与应用：了解在直角坐标系中把二重积分化为二次定积分的方法，理解简单二重积分的计算方法，了解从实际问题中抽象出二重积分模型解决简单实际问题的方法。

#### 【教学提示】

教学中要通过求曲顶柱体的体积、物体的质量等实例，引导学生从问题情境中感知二重积分的实际背景，抽象出二重积分的定义，了解二重积分存在的条件和几何意义；引导学生理解在直角坐标系中把二重积分化为二次积分的方法，运用二重积分解决简单实际问题。

教学中要利用计算机软件作图，通过求曲顶柱体的体积，帮助学生加深对二重积分概念的认识。

培养和提升学生数学运算、数学抽象、直观想象、思想方法等核心素养。

#### 【参考案例】

例 1 将  $x^2 + y^2 = 1$  在第一象限中的曲线与  $x + y - 1 = 0$  所围成的平面区域用联立不等式表示。

分析：本案例主要考查如何用联立不等式表示平面区域，通过作图、确定

变量范围得出联立不等式。

例 2 计算  $\iint_D x^2 y dx dy$ ，其中  $D$  是由  $y = x^3$ ， $x = 1$ ， $y = 0$  所围成的区域。

分析：本案例主要考查二重积分的计算，将  $D$  用联立不等式表示（可选择 X 型区域，也可选择 Y 型区域），然后用累次积分求出结果。

## 28. 概率统计（续）

### 【内容与要求】

(1) 条件概率：了解条件概率的概念，理解条件概率的计算公式，了解乘法公式，了解全概率公式，能利用条件概率和乘法公式分析和解决简单实际问题。

(2) 概率的加法定理：理解“互斥事件”和“对立事件”的概念，理解互斥事件、对立事件的概率公式，能利用所学知识解决简单实际问题。

(3) 离散型随机变量及其分布：理解随机变量、离散型随机变量的概念，会求简单的离散型随机变量的概率分布。

(4) 二项分布：了解  $n$  次独立重复试验模型，了解二项分布的概念，能利用  $n$  次独立重复试验模型及二项分布解决简单实际问题。

(5) 连续型随机变量与正态分布：了解连续型随机变量的概念，了解正态分布的概念以及在实际生活中的应用，了解正态分布的图形特征。

### 【教学提示】

教学中要结合实际案例和专业特点，让学生在动手实验中学会观察、推理、归纳、类比，体会从特殊到一般的思想，从而得出概念并理解概念；让学生搜集数据，借助 Excel 或 SPSS 等软件进行数据处理，提高学生运用相应软件处理数据的能力，从而提升教学的实用性。

教学中要基于具体情境，对生活中的随机现象进行辨析，引导学生理解互斥事件与对立事件的区别与联系；用数学试验模拟事件的发生，在此过程中理解概率加法公式、乘法公式以及全概率公式。

培养和提升学生的数学运算、数据分析、数学建模、思想方法和数学精神等核心素养。

### 【参考案例】

例 1 市场上有甲、乙、丙三家工厂生产的同一品牌产品，已知三家工厂的市场占有率分别为 30%、20%、50%，且三家工厂的次品率分别为 3%、3%、1%，

试求市场上该品牌产品的次品率。

分析：本案例主要考查全概率公式的运用。

例 2 在生活、实习中搜集一组样本（样本容量不低于 300）并整理数据，运用 Excel 或 SPSS 软件分析数据，判断这组样本数据是否服从二项分布或正态分布。

分析：本案例主要考查学生在理解二项分布、正态分布概念的基础上运用计算机软件处理数据的能力。

## 29.无穷级数

### 【内容与要求】

(1) 常数项级数的概念：了解常数项级数的概念，理解常数项级数收敛和发散的概念；了解几何级数收敛与发散的条件。

(2) 常数项级数的基本性质：了解级数的基本性质及收敛的必要条件。

(3) 正项级数的审敛法：了解正项级数的概念，了解  $p$  级数的敛散条件，了解正项级数收敛的基本定理、比较审敛法和比值审敛法。

(4) 函数项级数的概念：了解函数项级数和收敛域的概念，了解幂级数的概念以及幂级数收敛域的求法。

### 【教学提示】

教学中要以学生熟悉的问题引入相关概念，注重知识点之间的内在联系，由无穷等比数列和极限过渡到无穷级数，引导学生理解无穷级数的概念。

教学中可通过介绍级数的由来及发展等数学史，帮助学生理解级数的意义与应用；可将数列极限的知识迁移到数项级数及其性质、敛散性判断等相关内容上。

培养和提升学生的数学运算、逻辑推理、思想方法和数学精神等核心素养。

### 【参考案例】

例 1 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2}$  的敛散性。

分析：本案例主要考查用比较判别法判断正项级数收敛性。

例 2 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^5}{5^n}$  的收敛半径和收敛域。

分析：本案例主要考查根据定义求幂级数收敛半径及收敛域。

### （三）拓展模块二

#### 1. 数学文化专题

##### 【内容选择】

主要包括中国数学史、西方数学史、数学家的故事和数学美学等。

##### 【教学提示】

教师可以通过选讲《周髀算经》《九章算术》等，让学生了解中国古代数学的伟大成就和以问题为要、以算法为本的数学发展历程，提高学生的民族自信心和自豪感，增强责任担当意识；通过选讲《几何原本》，帮助学生了解古希腊几何公理演绎体系的特点及对数学发展的深远影响，加深学生对数学逻辑体系的认知，感悟数学建构之美，提升数学学习兴趣；通过选讲古今中外数学家的故事，帮助学生了解数学家的成长经历，体验数学家孜孜以求的钻研精神、严谨求实的科学态度和精益求精的职业素养，提升学生的核心素养和职业情怀；通过选讲数学美学，帮助学生感悟生活中无处不在的数学之美，体验数学内在的逻辑之美、数学思想和方法的应用之美，引导学生学会欣赏、追求卓越，提升学习品质。通过数学文化专题的学习，帮助学生更好地理解数学的由来、数学与其他学科的紧密联系、数学在现代科技发展发明中的巨大作用等，激发学生的爱国热情、报国之志、求实作风和进取精神。

教学中可以借助现代教育技术手段，拓宽学习渠道，增加知识的趣味性和感染力。通过组织自主探究、合作学习、小组研讨等形式多样的学习活动，引导学生深刻认识数学的重要性和学好数学的意义，逐步实现重视数学学习、喜欢学习数学到最终能够自觉运用所学数学知识解决实际问题。

通过本专题的学习，培养和提升学生的思想方法、逻辑推理、数学抽象、数学精神等核心素养。

#### 2. 数学工具专题

##### 【内容选择】

主要包括数学计算工具、数学绘图工具等。

##### 【教学提示】

在数学计算工具方面，教师可以通过选讲科学计算器、图形计算器等实物数

学工具的使用方法，帮助学生学会使用上述数学工具去辅助计算、分析数据，进而解决生产、生活中的实际问题。通过选讲解决高次方程求解、微积分等复杂数学问题的数学软件的使用方法，提高学生信息技术工具使用能力，培养学生的应用意识，增强学生解决问题的信心。数学软件还能够帮助学生还原并理解数学史中的经典案例，体味数学内在的逻辑之美。在数学作图工具方面，教师可以通过选讲尺规作图，使学生在初中的基础上掌握更多的作图方法，解决专业课程中的作图问题，实现数学能力向职业能力迁移。通过选讲数学软件作图辅助分析数学问题，例如，利用数学软件展示通过改变参数引起函数图象的动态变化，可以激发学生对函数性质的探索欲，培养学生勇于尝试应用数学工具主动学习的习惯。数学软件作图的“直观感、立体感、动态感”在绘制空间图形、理解三视图、认识空间几何体的结构等的教学中可以得到淋漓尽致的体现，利用数学软件作图具有绘制时间短、作图精度高、教学互动优等特点。利用数学软件的动态图象绘制功能，还可以实现数学概念可视化，动态展示、剖析数学思维过程，揭示数学本质。利用信息技术有时可以更好地呈现数学理论知识，感悟数学思想，提升数学思维，激活数学创造，提升学生的学习兴趣，加深对所学知识的理解。

教学中可以有机融入劳动精神、工匠精神教育，加强与专业课程融合，注重职业能力培养，增强学生运用数学工具的意识，提升数学工具的运用能力，拓展学习范围，促进学生乐学增效。

通过本专题的学习，培养和提升学生的数学建模、思想方法、逻辑推理、数据分析、数学精神等核心素养。

### 3.数学建模专题

#### 【内容选择】

主要包括分段函数模型、二次函数模型、指数函数模型、三角函数模型、等差数列模型、等比数列模型、概率模型、统计模型和微分方程模型等。

#### 【教学提示】

教师可以借助生产、生活中的实例，帮助学生选择恰当的数学模型解决有关问题，使学生了解数学建模的思想，感知数学建模是对现实问题进行数学抽象、用数学语言表达问题、用数学方法构建模型解决问题的过程，在实际情境中体会数学建模的一般过程：发现问题-分析问题-建立模型-求解模型-检验结果

-改进和完善模型。

教学中可以将数学、计算机、专业或实际问题有机地结合起来，引导学生寻求解决问题的方法，树立数学应用意识，提高学生解决实际问题的能力。

通过本专题的学习，培养和提升学生的直观想象、数学抽象、数学建模、逻辑推理、数据分析、思想方法等核心素养。

#### 4.规划与评估专题

##### 【内容选择】

主要包括线性规划和正态分布等。

##### 【教学提示】

教师可以根据学生专业学习的需求，选取恰当的实例引导学生描述线性规划问题，利用图解法分析和解决变量在可行域上的最优解和最值问题，促进学生专业综合能力的形成；通过实例，帮助学生认识正态分布的特点，并利用正态分布分析和判断有关事物发展的大致趋势。

教学中案例的选择要结合学生所学专业，以帮助学生感知数学在专业领域的作用；对于较复杂的线性规划问题，可以引导学生利用计算机软件辅助求解。

通过本专题的学习，培养和提升学生的数学运算、直观想象和数据分析等核心素养。

#### 5.数学与土木建筑专题

##### 【内容选择】

主要包括三角函数、解三角形、精度计算、行列式、概率与统计等。

##### 【教学提示】

教学中可以引导学生通过具体的情境感知三角函数、解三角形、精度计算、行列式、概率与统计等在工程测量方面的应用。帮助学生学会根据专业的要求，利用三角函数、解三角形、精度计算、行列式、概率与统计等知识从数学角度分析和解决工程测量中的悬高、长度、面积、偶然误差等问题。

通过组织自主探究、合作学习、小组研讨等形式多样的学习活动，引导学生更好地理解数学在工程类专业中的巨大作用，帮助学生深刻认识数学的重要性和学好数学的意义，同时使数学课堂更加丰富，激发学生的学习兴趣，培养学生严谨求实的作风和踏实进取的精神。

通过本专题的学习，培养和提升学生的思想方法、数学运算、数学建模、逻辑推理、数学精神等核心素养。

## 6.数学与财经商贸专题

### 【内容选择】

- (1) 个人所得税——分段函数；
- (2) 银行存款的“复利”——等比数列；
- (3) 股票的K线图——数据处理；
- (4) 生产最优化——线性规划；
- (5) 边际成本——导数。

### 【教学提示】

教师可以结合实例帮助学生了解我国个人所得税政策，尝试用分段函数去分析和解释个人所得税问题；利用等比数列的相关知识探究“复利”问题；学会用数据处理的方法统计经济领域中的相关问题，正确认识股票的K线图，分析数据，总结规律，规避风险；建立线性模型，利用线性规划知识，找出最优化方案，实现利益最大化；借助导数相关知识建立边际函数，解决生产中高效节能问题等，引导学生通过这些熟悉的案例，感知数学与我们日常生活和经济领域的联系，帮助学生认识数学在处理日常生活以及经济领域中相关问题时所发挥的作用。

教学中可以引导学生收集其他的案例，采用研讨性学习、专题活动等方式组织教学，充分发挥学生的主体性，让学生切实感受到数学的魅力。

通过本专题的学习，激发学生的学习兴趣，培养和提升学生的数学运算、思想方法、数学抽象、数学建模和逻辑推理等核心素养。

## 7.数学与信息技术专题

### 【内容选择】

主要包括算法与计算机编程、逻辑代数与数字逻辑电路等方面的案例。

### 【教学提示】

算法在计算机编程中的应用案例、逻辑代数在设计逻辑电路方面的应用案例的教学，旨在让学生体会数学与信息类课程的关系及在专业课程中的重要作用，认识数学的重要性，增强学习数学的兴趣和学好数学的信心，开拓视野，提升运用数学知识分析解决问题的能力，体验用数学的眼光审视专业问题、用数学的思维思考专业问题、用数学的方法解决专业问题、用数学的语言表达专业问题的过

程，逐步形成在生活和工作中运用数学的能力，提升数学学科核心素养和职业情怀。

教学中可以采用自主探究、师生合作、专题实践活动等方式组织教学，也可以让学生查阅相关专业书籍或网上资料，必要时借助信息技术直观演示功能辅助教学，提高教学的效率。在分组研讨、合作学、做中学、做中悟中提升学生用数学解决专业问题的能力。

通过本专题的学习，激发学生的学习兴趣和提升学生的数学建模、数学抽象、逻辑推理、数学精神等核心素养。

### 8.数学与装备制造专题

#### 【内容选择】

主要包括三角函数、坐标变换、微积分、精度计算、数学绘图工具等。

#### 【教学提示】

教师可以引导学生通过熟悉的情境感知三角函数、坐标变换、微积分、精度计算和数学绘图工具在机械加工、机械制造等方面的应用，帮助学生初步学会根据机械加工制造的要求，利用三角函数、坐标变换、微积分、精度计算和数学绘图工具进行图样的分析和设计。

教学中可以引导学生借助计算工具和绘图工具设计满足一定精度要求的机械加工制造图样；师生共同设计学习项目，鼓励学生开展探究性学习（自我探究和小组合作探究）。

通过本专题的学习，培养和提升学生的思想方法、直观想象、数学运算、数据分析和数学精神等核心素养。

### 9.数学与现代科技专题

#### 【内容选择】

主要包括现代科技领域相关的重要数学理论的起源、发展及其作用。

#### 【教学提示】

教师可以引导学生通过熟悉且感兴趣的科技发展问题，感知数学在现代科技领域的应用。如通过介绍统计语言模型，让学生了解其在语音识别、翻译等自然语言处理中的最新应用，感受用数学的方法描述语言规律；选讲密码学的数学原理，从密码学的自发时代，到信息论时代的密码学，使学生了解当今世界最可靠的加密方法背后的数学原理其实也并不复杂；介绍区块链的数学基础——椭圆曲

线加密原理，通过分析探讨比特币背后的数学基础，了解区块链加密原理，带领学生体会数学家和计算机科学家的匠心独韵，用简单而漂亮的加密算法开创了一个时代；与学生共同交流数学的极限——希尔伯特第十问题和机器智能的极限，从图灵划定计算机可计算问题的边界，到希尔伯特划定有解数学问题的边界，让学生了解人工智能的上限取决于数学本身的限制。

这一部分内容内涵现代而丰富，外延广泛而融合，需要教师自身具备宽广的知识面，较强的信息敏感度、学习能力及叙事能力。在教学中，应将复杂的数学原理转化为生动形象的语言，并举以具有时代意义的著名案例、科学家的故事及他们从事科学研究的方式方法；亦可组织学生通过多种渠道查询资料、撰写论文、提出议题。本案例偏向“科普”，旨在提升学生认识水平与思辨能力。

通过本专题的学习，培养和提升学生的思想方法、逻辑推理、数学抽象、数学建模、数学精神等核心素养。

## 五、学业质量

### （一）学业质量内涵

学业质量是学生在完成本学科课程学习后的学业成就表现。学业质量标准是以本学科核心素养及其表现水平为主要维度，结合课程内容，对学生学业成就表现的总体刻画。学业质量水平标准是学生自主学习与评价、教师教学活动与评价、教材编写的指导性要求，也是相应考试命题的依据。学业质量依据核心素养关键特征表现的不同，描述了不同水平学习结果的具体表现，划分为水平一和水平二。

## (二) 学业质量水平

五年制高职数学学业质量两个水平的描述见下表。

核 心 素 养	质量描述	
	水平一	水平二
直 观 想 象	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能想象并画出实物的几何图形，理解几何图形中各要素之间的关系，理解图形与图形、图形与数量之间的关系。</li> <li>2. 能借助图形的性质和变换（平移、对称、旋转）发现简单的数学规律；会描述简单图形的位置关系和度量关系及其特征。</li> <li>3. 能用图形表达简单的数学问题，会借助直观想象解决简单的数学应用问题。</li> <li>4. 会利用图形直观表达事物的特征和关系，进行互动交流。</li> <li>5. 具有利用直观想象思考问题的意识和习惯。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能想象并构建相应的几何图形，分析和发现图形与图形、图形与数量之间的关系。</li> <li>2. 掌握研究图形与图形、图形与数量之间关系的基本方法，能借助图形性质探索数学规律。</li> <li>3. 能用图形表达简单的数学问题，会借助直观想象探索解决有关的数学应用问题。</li> <li>4. 会利用直观想象探讨相关问题，发现数与形之间的联系，进行书面交流和互动交流。</li> <li>5. 善于借助直观想象发现问题、思考问题、分析问题和解决问题。</li> </ol>
数 学 抽 象	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能描述从具体问题中抽象出数学概念和规则的过程。</li> <li>2. 能理解用数学语言表达的数学过程和应用问题，会从简单的实际问题中抽象出数学问题。</li> <li>3. 能在解决类似问题的过程中认知数学通性通法，并体会其中蕴含的数学思想方法。</li> <li>4. 会用抽象的概念和规则解释具体的现象和规律。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能从具体问题中抽象出一般的数学概念和规则。</li> <li>2. 能用具体例子解释抽象的数学概念和法则，会从相关的实际问题中抽象出数学问题。</li> <li>3. 能用数学语言表达数学概念、规则、推理和论证；会提炼解决一类问题的数学方法，并解释其中的数学思想方法。</li> <li>4. 善于用抽象的概念和规则解释具体的现象和规律。</li> </ol>

数学运算	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能辨识运算对象，理解运算规则。</li> <li>2. 能依据运算规则进行简单的数学运算，并获得正确结果。</li> <li>3. 能根据计算要求找出合适的运算方法，会借助运算验证结论。</li> <li>4. 能借助数学运算解决简单的数学应用问题。</li> <li>5. 具有利用运算结果处理问题的意识和习惯。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能辨识运算对象，掌握运算规则。</li> <li>2. 能依据运算规则进行数学运算，并获得正确结果。</li> <li>3. 能根据计算要求，选择合适的运算思路和方法，设计运算程序。</li> <li>4. 能借助数学运算解决数学应用问题。</li> <li>5. 善于运用数学运算和运算结果解决问题。</li> </ol>
逻辑推理	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能辨识归纳推理、类比推理和演绎推理。</li> <li>2. 能辨析所学数学命题中条件与结论的逻辑关系，会有条理地表述简单的数学命题。</li> <li>3. 能够明确所讨论数学问题中的因果关系，进行简单的逻辑推理。</li> <li>4. 具有运用逻辑推理思考问题和表达思维的习惯。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能区分归纳推理、类比推理和演绎推理及其基本形式。</li> <li>2. 能辨析所学数学命题中条件与结论的逻辑关系，有条理地表述命题；能通过举反例说明某些数学论断不成立。</li> <li>3. 能辨析数学问题中的因果关系，进行简单的逻辑推理。</li> <li>4. 善于运用逻辑推理分析问题、说明问题和论证问题。</li> </ol>
数据分析	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能辨识随机现象，解决简单的统计与概率问题。</li> <li>2. 能利用古典概型计算简单随机事件的概率。</li> <li>3. 会选择恰当的抽样方法收集数据，借助基本统计方法解决简单的统计问题。</li> <li>4. 会利用统计和概率的语言表达简单的随机现象，会用统计图表和古典概型解释随机现象。</li> <li>5. 具有运用数据分析的方法思考问题和处理问题的意识和习惯。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能辨识随机现象，辨析随机现象与随机变量之间的关系。</li> <li>2. 能针对具体问题，选择随机变量刻画随机现象。</li> <li>3. 能运用恰当的统计或概率模型解决相关的实际应用问题。</li> <li>4. 会用统计或概率模型表达随机现象，能用数据呈现的规律解释随机现象。</li> <li>5. 善于通过数据分析发现问题，运用数据分析的方法解决问题。</li> </ol>

续表

<p>数 学 建 模</p>	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能辨析相关应用问题的数学模型及其参数和结论的实际含义。</li> <li>2. 能模仿数学建模的过程解决简单的应用问题。</li> <li>3. 能借助已有数学模型的结果说明相关问题。</li> <li>4. 具有运用简单数学模型处理相关问题的意识和习惯。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能辨析相关应用问题的数学模型，理解其参数和结论的实际含义。</li> <li>2. 能通过数学建模解决简单的应用问题。</li> <li>3. 会借助已有数学模型的结果讨论相关问题。</li> <li>4. 善于运用相关数学模型表达问题和解决问题。</li> </ol>
<p>思 想 方 法</p>	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能辨识所学数学知识中的思想方法，并了解其表达方式。</li> <li>2. 能辨识用数学语言表述的数学概念、定理、规律等，能运用数学思想方法形成对相关知识的理解。</li> <li>3. 能运用数学方法观察、分析数学问题，形成对问题的初步解释。</li> <li>4. 能运用数学思想方法在相关新知学习中形成类比，产生学习迁移。</li> <li>5. 具有运用数学思想方法解决实际问题的意识和习惯。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能从数学认知过程中发现数学思想方法，并理解其表达方式。</li> <li>2. 能用数学语言表述概念、定理、规律等，能运用数学思想方法加深对相关知识的理解。</li> <li>3. 能用数学方法观察、分析、解决问题，形成对问题的解释和判断。</li> <li>4. 能运用数学思想方法在相关新知学习中形成类比，产生学习迁移。</li> <li>5. 能运用数学思想方法发现并解决实际问题。</li> </ol>
<p>数 学 精 神</p>	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 初步了解数学精神的内涵及表现形式。</li> <li>2. 能基于数学知识的实在性，客观地、有条理地观察问题。</li> <li>3. 具有较严谨、系统的分析并解决问题的意识和习惯。</li> <li>4. 遵守数学规范，形成严谨细致、求真务实、精益求精的行为习惯。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能从所学数学知识中理解数学精神的内涵及实质。</li> <li>2. 在理解数学知识实在性的基础上，客观地、逻辑地处理问题。</li> <li>3. 能严谨、系统地分析、解决实际问题。</li> <li>4. 能遵守以理性为基础的价值准则，形成严谨细致、求真务实、精益求精的内生动力。</li> </ol>

## 六、课程实施

### （一）教学要求

五年制高职数学教学要深入挖掘数学学科的育人价值，落实立德树人根本任务，培育和践行社会主义核心价值观，将价值塑造、知识传授和能力培养三者融为一体，将数学学科核心素养的培育贯穿于教学活动的全过程。教学中，要遵循五年一体化课程设计，统筹初等数学与高等数学教学内容，执行规定的教学时数，完成课程任务；要遵循学生不同成长时期的认知特点，循序渐进，达成课程目标；要遵循学生个性化需求和专业特点，改革教学方法和教学手段，激发学生学习兴趣，促进数学学科核心素养和职业素养的形成和发展；要合理融入思想政治教育，引导学生掌握事物发展规律，通晓天下道理，丰富学识，增长见识，塑造品格，努力成为德智体美劳全面发展的社会主义建设者和接班人。

#### 1.课程思政，坚持立德树人，发挥数学课程育人功能

数学课程教学是数学教育的基本形式，是学生获得数学知识、掌握数学思想方法、积累数学活动经验的主要途径。教师要发挥数学课程特点，引导学生通过严密的推理、论证，逐步养成严密思考、言必有据的严谨态度；通过抽象与概括、归纳与演绎、分析与推理、逻辑与直觉等思维训练，提高思维能力，培养理性精神；通过展示简洁、和谐、对称等数学知识的表达方式，感受数学之美，培养高尚审美情操；通过生动的数学故事、我国古代数学史、重大数学事件以及国家经济发展数据等，激发文化自信和家国情怀，培养一丝不苟、精益求精、刻苦钻研、勇于创新的优良品质。

#### 2.突出基础，聚焦核心素养，整体把握课程教学目标

数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现，是在数学学习的过程中逐步形成和发展的。教师要认真研读课程标准，深入理解数学学科核心素养的内涵、价值、水平及其相互联系；要整体把握各模块的教学内容与要求，加强模块之间的衔接和整合，制定切实可行的单元教学目标和学时教学计划，确保教学任务有效落实；要注重基础知识教学，引导学生理解基础知识、掌握基本技能、感悟数学基本思想、积累数学基本活动经验，促进数学能力的提升；要加强对培养数学

学科核心素养的教学内容和教学方式的研究,提高基于核心素养的教学设计和课程开发能力。

### **3.因材施教,坚持面向全体,合理设计课堂教学活动**

数学教学要面向全体学生,突出学生的主体地位,促进学生的全面发展。要处理好教学内容的统一性与学生的专业学习、兴趣爱好、个性发展之间的关系,教学要求的统一性与学生不同的学习基础、职业发展之间的关系。教师要了解学生的学习能力和心理特点,正视学生之间存在的差异性,改进和优化教学方法,重视启发式、讨论式、小组合作学习等教学模式,营造宽松、和谐、合作、积极的学习氛围,激发学生参与学习活动的兴趣和热情,使他们获得成就感,逐步养成终身学习的意识和能力。

### **4.强化衔接,体现职教特色,提高学生数学应用能力**

五年制高职数学课程包含了初等数学和高等数学的有关内容,同时又与专业知识的学习和岗位职业能力的培养相关联。教师要加强对课程结构、课程内容特点的研究,把握专业学习对数学知识、能力的要求,进一步明确数学课程的目标和任务。要打破课堂内外、学科内外、学校内外的界限,引导学生在实际生活中结合专业特点学数学、用数学。在教学中,既要注重与初中知识有机衔接,帮助学生顺利进入初等数学部分的学习,完成学习任务;又要统筹考虑初等数学和高等数学之间的知识、能力方面的内在联系,减少高等数学的学习困难;还要有意识地加强与专业课程、岗位职业能力的联系,为学生的专业学习提供必需的数学知识和数学能力,提高学生数学应用能力。

### **5.注重实效,利用信息技术,优化教学内容呈现方式**

教师要主动探究信息时代背景下的数学教学方式,结合数学学科特点,将信息技术与数学课程深度融合,有效实施五年制高职数学课程的信息化教学。在教学中,教师要充分利用微课、在线开放课程及教学软件等数字化教学资源,高效、直观、生动地呈现教学内容,帮助学生理解数学知识;利用计算机软件或计算工具进行数据的计算、统计和分析,绘制统计图表等。要不断提高信息技术应用水平,善于利用网络平台获取教学资源,提高课堂教学的信息化程度。要利用当代学生喜欢上网的特点,因势利导,引导学生在网络环境中学习数学,利用网络平台开展师生之间、生生之间的交流与合作,创新教学方式、学习支持方式和效果

评价方式，努力提高教学实效。

## （二）学业水平评价

五年制高职数学学业水平评价是构建五年制高职教育教学评价体系的核心内容之一。通过学业水平评价，全面考查五年制高职学校数学课程的教学成效，诊断学生学习和教师教学过程中的优势和不足，为改进学生的学习行为和教师的教学行为提供依据。学业水平评价既要关注学生的数学学习结果，也要关注学生的学习过程表现，更要关注学生数学学科核心素养的形成与发展。

### 1.评价原则

**科学性与公平性。**既要评价学生对数学基础知识与基本技能的理解和掌握，又要评价学生的数学基本能力，发挥评价促进学生成长、教师发展和提高教学质量的功能。要建立规范完善的多元评价体系，制定操作性强的评价目标、内容、方法和标准，实现学业水平评价的公平合理。

**整体性与阶段性。**要立足于学业质量标准，对学生学习的各方面、各环节作出多角度、全方位的评价，全面准确地判断学生数学学科核心素养的发展水平；要立足数学学科核心素养达成的渐进性，把教学评价的总目标合理分解到教学的各个阶段，将单元评价、学期评价、结业评价有机结合，综合考查学生的学业成就。

**过程性与发展性。**将评价融入教学过程之中，通过观察学生的学习行为和思维表现来评价学生的学习成效，及时纠正学生在学习活动中存在的问题，改善学生的学习方式；要立足学生的成长和进步，动态地看待学生的学习和成长过程，通过发展性评价激发学生的学习兴趣，充分调动学生的学习积极性，提高学习成效。

### 2.评价方式

**评价主体多元化。**采用学生自我评价、同伴评价、教师评价、家长评价、企业评价等相结合的方式，建构学习与评价的共同体，从不同角度获取学生发展过程中的信息，全面评价学生学业成就。

**评价形式多样化。**采用多种评价方式，增强评价的科学性。一是选用课堂观察、口头测验、对话交流、小组分享、开放式活动中的表现、课内外作业、调查

报告、小论文等评价方式；二是采用单元检测、期中期末考试的方式；三是充分利用五年制高职的管理特点，采用阶段抽测和学业水平考试的方式。

### 3.考试与命题

#### (1) 考试目的

依据五年制高等职业教育数学课程标准，通过对学生的数学知识、数学技能和数学能力的考核，检测学生的数学学科核心素养发展水平，全面衡量学生的学业成就；同时检测课程标准的实施情况和教师的教学成效，发挥“三教”改革的导向作用。

#### (2) 命题原则

思想性原则。命题要落实立德树人根本任务，引导学生在学习和工作中践行社会主义核心价值观，养成良好的道德品质，明确自身发展方向，努力成为高素质技术技能人才。

情境性原则。命题要注重创设与学生课程学习、专业学习、探索学习、生活实践等紧密联系的、有价值的问题情境，引导学生从数学的角度去思考和理解，在学生运用数学知识分析问题和解决问题的过程中，判断学生数学素养的达成水平。

基础性原则。命题要注重考查学生的数学基础知识、基本技能、基本思想方法的达成情况，要设置有内在联系的、指向数学学科核心素养的问题或任务，让学生以概念、判断、推理的方式进行逻辑思维，从而得出概念清晰、逻辑严密的结论。

#### (3) 命题思路

五年制高职数学学业水平考试是五年制高等职业学校学生合格毕业的考试，考试命题以基础模块的内容为主，达到基础模块学业水平一的要求。要兼顾学业水平的基本要求与学生学业水平的实际起点，命题内容要体现数学学科的基础性和学生成长的规律性；要处理好学科核心素养与知识、技能和情感态度价值观的关系，合理均衡各个核心素养在命题中的比重，发挥试题对教学的导向作用；要合理设置试题的题型、题量和考试时间，关注试题中的知识覆盖面与难度分布。

高等本科院校专升本招生考试是五年制高等职业学校学生进入本科院校学习的升学考试，考试命题以基础模块和拓展模块一的内容为主，达到基础模块学

业水平二和拓展模块一学业水平一的要求。要兼顾学生的实际能力与继续学习的需要，体现对学生数学学科核心素养达成水平的评价；重点考查能够承载相应核心素养的基础知识和基本技能，注重本专科教育数学学科知识的有效衔接。

对数学基础知识的考查，要贴近教学实际，既注意全面，又突出重点，总体涵盖面应不少于教材所含知识点的 70%，支撑数学知识体系的主干内容——函数、数列、三角函数、不等式、立体几何、解析几何、概率、极限、导数、微分等要占有较大比例，构成数学试卷的主体。对数学基本思想和方法的考查，要结合数学知识与能力的考查进行，考查中要强调通性通法，淡化特殊技巧，有效检测学生对数学知识所蕴涵的数学思想与方法的掌握程度。对学生数学学习能力的考查要以数学知识为载体，以贴近学生生活的实际问题为背景，考查学生数学基本技能和能力，并通过创新试题，对学生的创新能力进行考查。

考试成绩可采用合格、不合格进行定性描述，也可采用分数进行定量描述。

#### 4.评价结果运用

五年制高职学生数学学业评价结果合格，取得本学科基础学分 16 学分（其中基础模块 13 学分、拓展模块一 3 学分）。

学业评价的数据是检验学校教学管理水平的参考，是教师改进教学工作、开展教学研究的科学依据。教师要充分利用现代信息技术，收集、整理、分析有关学生学习过程和结果的数据，了解自己的教学效果，反思自己的教学过程，发现教学中的问题，改进教学方法，不断提高教学质量。

评价结果可作为认定教学质量水平的重要参考数据。教育行政部门应及时通报学业水平评价结果，开展与评价结果数据相关的教学绩效评估分析，在教学管理、教师培养、教学资源应用等方面给出指导性意见。

### （三）教材编写或选用要求

编写或选用的教材要以习近平新时代中国特色社会主义思想为指导，贯彻落实党的教育方针和党对五年制高等职业教育发展的要求，坚持正确的政治导向和价值取向，弘扬社会主义核心价值观，全面落实立德树人根本任务，以课程任务、目标和课程内容与学业要求为依据，让五年制高职数学学科核心素养在教材中落地生根。

教材编写应由权威机构负责，组织由本学科的课程标准专家、课程专家、教研专家、一线教学能力强且经验丰富的教师组成编写团队。学校应按照有关文件要求，选用权威机构组织编写、修订的数学规划教材。编写或选用的教材要符合国家课程设置和本课程标准，遵循思想性、目的性、基础性、规律性、创新性、职业性和时代性等基本原则。

### 1.突出思想性

教材是落实立德树人根本任务的重要载体，应突出数学的育人功能，体现数学的文化价值，渗透社会主义核心价值观和精益求精的大国工匠精神。要合理呈现数学的思想、知识、方法、观点、语言以及它们的形成和发展过程，选择典型人物、科学史实等鲜活案例素材，以及在党的领导下取得的重大发展成就和重大科技成果，阐释数学的基础性、实用性和发展性，做到通俗易懂、图文并茂。

### 2.重视目的性

教材主线的设计要全面考虑本课程目标的达成，要通过基本的数学活动，展现数学知识的发生、发展过程，使学生在活动中学习数学基础知识、掌握基本技能、获得基本的数学思想方法熏陶，从而提高学生的数学学科核心素养。通过观察、辨析、反思和实践等形式，引导学生形成理性思维，实现从学理认知到信念生成的转化，培养学生胸怀祖国、服务人民的爱国精神，勇攀高峰、敢为人先的创新精神，一丝不苟、精益求精的工匠精神，爱岗敬业、无私奉献的职业精神。

### 3.强化基础性

教材要准确把握教学内容起点定位，将义务教育阶段有关重点知识有机融入，延长从初中到五年制高等职业教育的适应期。准确把握五年制高等教育数学学习的基础要求，使学生扎扎实实地掌握数学基础知识和基本技能。

### 4.把握规律性

教材内容的呈现要注意反映数学发展规律及学生认知规律，体现从具体到抽象、从特殊到一般的原则。要注意相关数学知识之间的相互联系，关注学生学习的渐进性和发展性，加深学生对数学知识的认识和理解。

### 5.富有创新性

教材内容的阐述要有创新，要体现以学生发展为中心的理念，力求做到表述严谨、原理清晰、通俗易懂，使教师好教、学生易学。要做到基本概念与原理叙

述正确，科学事实与社会现象描述清楚，引用的数据、图表等材料可靠。要突出趣味性，增强吸引力，让学生读懂数学语言、说清数学知识、讲明数学原理、厘清解题过程，提高学生用数学知识解决问题的能力。

#### 6.体现职业性

教材应具有鲜明的职业教育特色，准确把握具体职业岗位所需要的数学知识和技能，以培养技术技能人才为目标，筛选出与专业实际应用结合紧密的、能被学生接受的典型案例，设计与社会生活和生产实践接近的数学情境，使学生在解决真实问题中发展应用意识。

#### 7.反映时代性

教材应具有先进的教学理念，按照深入浅出、通俗易懂的原则，介绍与相关模块联系的数学史知识或现代数学知识，使学生感受数学在时代进步中的发展与应用，激发他们的学习兴趣。同时要适应信息技术的发展，结合模块特点，有机运用先进的教育技术手段，为师生提供文字、图像、动画、音频、视频等丰富生动的教学资源，优化教材内容。

### （四）课程资源开发与利用

课程资源是指有利于实现课程目标的一切素材、工具、人力和环境，是实现课程目标的必备条件。积极开发和利用五年制高职数学课程资源，有助于学生的学和教师的教，有助于推动教学模式和教学方法的改革，有助于拓宽五年制高职数学学科核心素养的培养渠道，促进课程目标的有效达成。五年制高职数学课程资源主要包括文本资源、数字化资源和特色资源等。

#### 1.文本资源

文本资源是以文本形式存在的资源，是教学活动的主要资源，包括教材、教学辅助材料等。选择的学生学习辅助材料要具有针对性和适度性，有利于激发学习兴趣，扩大阅读视野，提升思维品质及职业素养；教师教学辅助材料要具有指导性和实用性，有利于帮助教师确立正确的课程理念，更新教学观念，完善知识结构，优化教学方法，提高教学能力。

## 2.数字化资源

数字化资源是指基于现代教育技术开发的教学资源，包括电子教材、电子教案、教学课件、题库、音频、视频、动画、虚拟仿真等。教师要积极开发以知识点为单位、由多个内在关联的素材组合而成的积件资源，开发以学习任务为单位、由多个知识点和能力点的集结组合而成的教学模块资源，开发以评价为主的作业与习题库及企业案例资源，为教学过程的每一个环节提供充盈的资讯信息。教师要正确处理现代信息技术与数学教学的关系，创设生动活泼的教学情境，促进数学教学模式改革，提高数学教学效率。要引导学生将信息技术作为主动学习的工具，激发学生的学习兴趣，促进学生的过程参与，提高学生分析问题与解决问题的能力。

## 3.特色资源

特色资源主要是指具有地域特色和专业特色、能够助力课程教学的课程资源。学校应鼓励教师积极开发校本课程，邀请行业、企业、科研院所、高等院校专家开展与五年制高职数学教学有关的专题讲座、专题培训、社会实践等，增强学生的数学应用意识，提高职业素养。要指导学生通过图书馆和网络检索文献，了解数学的发展变迁，了解数学在社会发展和进步历程中的历史事件和历史人物，提升学生的人文素养，增强学生的爱国情怀和责任意识。

## （五）对地方与学校实施本课程的要求

各校应结合学生发展的不同需要，合理制订数学课程实施计划，按照课程标准要求开齐、开足、开好基础模块和拓展模块一，根据需要自主开设拓展模块二和数学专题。要健全教学管理制度，建立教学质量监控体系，实行听课、巡课、评课、赛课制度，紧抓教学环节和教学过程。立足学校实际，健全教研制度，发挥骨干教师的引领作用，组织开展校本研修，支持教师参加各级学习培训，不断提高教师的专业素养和教学能力，确保基于数学学科核心素养的教学改革有部署、有落实、有成效，确保数学课程标准落地生根。

各地应完善教研体系，建立五年制高职数学教研队伍，充分发挥教研引领作用，服务教师教学能力提高，牵头开发高质量的课程资源。对学校、教师在实施课程标准中的问题与困难，开展有针对性的教科研活动，举行专题培训、课题研究和学术交流等，帮助教师转变教学观念，指导学校依据课程标准开展教学管理。

地方教育行政部门负责本地区课程标准实施的统筹规划与管理,应建立有效机制,推进本地区五年制高职学校数学课程标准的实施,强化对本地区五年制高职学校数学教师的全员培训与指导,加强师德师风建设;健全考核与评价制度,加强质量管理,实行质量监控。

# 附录 1

## 基础模块课程内容与学时安排建议

章名称	节名称	节学时	章学时
1. 集合与充要条件	集合及其表示	3	10+1
	集合之间的关系	2	
	集合的运算	3	
	充要条件	2	
2. 不等式	不等式的基本性质	2	9+1
	区间	1	
	一元二次不等式	3	
	含绝对值的不等式	2	
	不等式的应用	1	
3. 函数	函数的概念	2	11+1
	函数的表示方法	3	
	函数的单调性和奇偶性	4	
	函数的应用	2	
4. 指数函数与对数函数	实数指数幂	2	12+1
	指数函数	2	
	对数的概念	2	
	对数的运算	2	
	对数函数	3	
	指数函数与对数函数的应用	1	
5. 三角函数	角的概念的推广	2	17+1
	弧度制	2	
	任意角的正弦函数、余弦函数和正切函数	2	
	同角三角函数的基本关系	2	
	诱导公式	2	
	正弦函数的图象和性质	3	
	余弦函数的图象和性质	2	
	已知三角函数值求角	2	

续表

6. 数列	数列的概念	2	12+1
	等差数列	4	
	等比数列	4	
	数列的应用	2	
7. 平面向量	平面向量的概念	2	11+1
	平面向量的线性运算	4	
	平面向量的内积	2	
	平面向量的坐标表示	3	
8. 直线与圆的方程	两点间距离公式和线段的中点坐标公式	2	17+1
	直线的倾斜角与斜率	1	
	直线的点斜式和斜截式方程	2	
	直线的一般式方程	1	
	两条相交直线的交点	1	
	两条直线平行的条件	2	
	两条直线垂直的条件	1	
	点到直线的距离公式	1	
	圆的方程	3	
	直线与圆的位置关系	2	
	直线与圆的方程的应用	1	
9. 复数及其应用	复数的概念	2	12+1
	复数的代数运算	3	
	复数的几何意义及三角形式	3	
	棣莫弗定理与欧拉公式	3	
	复数的应用	1	
10. 简单几何体	三视图	3	11+1
	空间图形的画法	2	
	直棱柱、正棱锥的表面积	2	
	圆柱、圆锥、球的表面积	2	
	柱、锥、球的体积	2	

续表

11. 概率与统计初步	随机事件	1	11+1
	古典概型	1	
	概率的简单性质	1	
	抽样方法	3	
	统计图表	3	
	样本的均值和标准差	2	
12. 极限与连续	初等函数	2	18+2
	数列的极限	2	
	函数的极限	6	
	两个重要极限	4	
	无穷小	2	
	函数的连续性	2	
13. 导数与微分	导数的概念与运算	6	20+2
	函数的微分	4	
	中值定理与洛必达法则	4	
	导数与微分的应用	6	
14. 积分及其应用	不定积分的概念与基本公式	4	20+2
	定积分的概念与性质	4	
	微积分基本定理	2	
	积分基本运算法则	2	
	换元积分法	4	
	分部积分法	2	
	积分的应用	2	

## 附录 2

拓展模块一课程内容与学时安排建议

章名称	节名称	节学时	章学时
15. 排列组合与二项式定理	分类、分步计数原理	2	14+2
	排列与排列数公式	3	
	组合与组合数公式	4	
	排列组合的应用	2	
	二项式定理	3	
16. 逻辑代数初步	二进制及其转换	2	14+2
	命题逻辑与条件判断	3	
	逻辑变量与基本运算	4	
	逻辑式与真值表	3	
	逻辑运算律	2	
17. 立体几何	平面的基本性质	3	14+2
	直线与直线的位置关系	3	
	直线与平面的位置关系	4	
	平面与平面的位置关系	4	
18. 圆锥曲线	椭圆	4	14+2
	双曲线	4	
	抛物线	4	
	圆锥曲线的应用	2	
19. 线性代数初步	行列式初步	4	14+2
	矩阵的概念	2	
	矩阵的运算	4	
	线性规划初步	4	
20. 常微分方程	微分方程的基本概念	2	14+2
	一阶线性微分方程	4	
	二阶常系数齐次线性微分方程	4	
	常微分方程的应用	4	

续表

21. 三角计算	和角公式	3	15+2
	倍角公式	2	
	正弦型函数	4	
	解三角形	4	
	三角计算的应用	2	
22. 统计	用样本估计总体	3	5+2
	一元线性回归	2	
23. 数据表格信息处理	数据表格、数组	2	14+2
	数组的运算	4	
	数据的图示	4	
	散点图及其数据拟合	1	
	用 Excel 处理数据表格	3	
24. 算法与程序框图	算法的概念	3	11+2
	程序框图	5	
	算法与程序框图应用举例	3	
25. 坐标轴平移与参数方程	坐标轴平移	3	7+2
	参数方程	4	
26. 多元函数微分及其应用	多元函数的基本概念	2	10+2
	多元函数的极限	4	
	偏导数	4	
27. 二重积分及其应用	二重积分的基本概念	2	6+2
	二重积分的计算与应用	4	
28. 概率统计(续)	条件概率	4	16+2
	概率的加法定理	4	
	离散型随机变量及其分布	4	
	二项分布	2	
	连续型随机变量与正态分布	2	
29. 无穷级数	常数项级数的概念	2	8+2
	常数项级数的基本性质	2	
	正项级数的审敛法	2	
	函数项级数的概念	2	

## 附录 3

### 基础模块学业质量要求

课程内容	质量描述	
	水平一	水平二
集合与充要条件	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能描述集合及相关概念，会用数学语言表示集合；</li> <li>2. 会判断元素与集合、集合与集合之间的关系；</li> <li>3. 会进行集合间的交、并、补运算；</li> <li>4. 能通过条件与结论之间的关系判断两者之间的充分性与必要性。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-4；</li> <li>2. 会运用集合包含关系的传递性判断两个集合的关系；</li> <li>3. 能感知用充分、必要条件进行逻辑推理的过程。</li> </ol>
不等式	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能用“作差法”判断两个数的大小，了解不等式的基本性质；</li> <li>2. 能在数轴上表示区间，能借助数轴理解实数绝对值的几何意义；</li> <li>3. 会借助二次函数的图象求解一元二次不等式，会用区间表示不等式的解集；</li> <li>4. 会求形如 <math> ax+b &lt;c</math> 和 <math> ax+b &gt;c</math> (<math>c&gt;0</math>) 的含绝对值不等式的解集；</li> <li>5. 会通过数学建模，解决与一元二次不等式有关的简单实际问题。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-5；</li> <li>2. 能运用不等式的性质进行简单的推理；</li> <li>3. 会根据一元二次不等式、二次函数、一元二次方程三者之间关系解决有关数学问题。</li> </ol>
函数	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能从两个变量之间的依赖关系、集合之间的对应关系、函数图象的几何直观等多个角度，理解函数的意义与数学表达；</li> <li>2. 会求函数的定义域，会根据对应法则求函数值；</li> <li>3. 会运用恰当的方法（解析法、列表法、图象法）表示函数；</li> <li>4. 会借助函数图象判断函数的单调性、奇偶性；</li> <li>5. 能通过数学建模解决与分段函数有关的简单实际问题。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-5；</li> <li>2. 能用函数的单调性、最大（小）值和奇偶性等性质描述函数的图象特征；</li> <li>3. 能用定义证明函数的单调性和奇偶性；</li> <li>4. 能通过数学建模解决与二次函数有关的实际问题。</li> </ol>

课程内容	质量描述	
	水平一	水平二
指数函数与对数函数	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能通过具体实例，体会幂指数从正整数拓展到有理数、实数的过程，会进行实数指数幂的运算；</li> <li>2. 会画指数函数的图象，会借助几何直观描述指数函数的性质，会用指数函数的单调性比较同底实数指数幂的大小；</li> <li>3. 理解对数的概念和运算性质，会用对数的定义进行指数式与对数式的互化；会用换底公式将一般对数转化成自然对数或常用对数；</li> <li>4. 会用计算工具求实数指数幂和对数的值；</li> <li>5. 能用描点法或借助绘图工具画出对数函数的图象，会借助几何直观描述对数函数的性质，会用对数函数的单调性比较同底对数值的大小。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-5；</li> <li>2. 会根据对数的性质和运算法则进行对数的运算；</li> <li>3. 会用指数函数、对数函数的图象和性质解决问题；</li> <li>4. 能通过数学建模解决与指数函数或对数函数有关的简单实际问题。</li> </ol>
三角函数	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会判断任意角所在的象限，会求在指定区间内与已知角终边相同的角；</li> <li>2. 能进行弧度与角度的互化，会用弧长公式和扇形面积公式解决问题；</li> <li>3. 会根据任意角的三角函数（正弦、余弦和正切）的定义，判断角的三角函数值的符号；</li> <li>4. 会用同角三角函数的平方关系和商数关系进行化简和求值；</li> <li>5. 能用诱导公式进行三角函数的求值与化简；</li> <li>6. 会用“五点法”画正弦函数、余弦函数在 <math>[0, 2\pi]</math> 上的简图，能用正弦函数、余弦函数的图象与性质解决问题；</li> <li>7. 会根据特殊的三角函数值求 <math>[0, 2\pi]</math> 范围内的角；</li> <li>8. 会用计算工具进行有关的三角计算。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-8；</li> <li>2. 能用“五点法”画正弦函数、余弦函数在一个周期内的简图；</li> <li>3. 会根据三角函数值求指定范围内的角；</li> <li>4. 能通过数学建模，利用三角函数的性质解决生产生活中的简单实际问题。</li> </ol>

课程内容	质量描述	
	水平一	水平二
数列	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能体会数列及有关概念的抽象过程，会抽象出数列前几项的特征，推出满足条件的一个通项公式，会用通项公式求数列的某一项；</li> <li>2. 能体会等差数列及有关概念的抽象过程，能直接利用等差数列的通项公式和前 <math>n</math> 项和公式进行简单的计算；</li> <li>3. 能体会等比数列及有关概念的抽象过程，能直接利用等比数列的通项公式和前 <math>n</math> 项和公式进行简单的计算。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-3；</li> <li>2. 会推导等差数列、等比数列的前 <math>n</math> 项和公式，会求简单数列的前 <math>n</math> 项和；</li> <li>3. 能通过数学建模，解决与等差数列、等比数列有关的简单实际问题。</li> </ol>
平面向量	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会用有向线段表示向量，会判断两个非零相量是否相等、相反或平行；</li> <li>2. 会运用向量加法的三角形法则进行平面向量的加减运算，会进行平面向量的数乘运算；</li> <li>3. 会求两个向量的内积；</li> <li>4. 会用直角坐标表示向量，会用向量的坐标进行向量的加、减、数乘及内积运算。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-4；</li> <li>2. 会用向量的坐标形式判定两个向量平行或垂直；</li> <li>3. 会用向量解决简单的平面几何问题、力学问题及其他实际问题。</li> </ol>
直线与圆的方程	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会用公式求两点间的距离和线段的中点坐标；</li> <li>2. 会借助几何直观认识直线的倾斜角，能根据条件求直线的斜率；</li> <li>3. 能根据给定条件求直线的点斜式、斜截式和一般式方程，会进行直线斜截式和一般式方程的互化；</li> <li>4. 会判断平面内两条直线的位置关系，会求两条直线的交点坐标，会求点到直线的距离；</li> <li>5. 能根据圆心坐标和半径写出圆的标准方程，会根据圆的标准方程求圆心坐标和半径；</li> <li>6. 会根据圆心到直线的距离判断直线与圆的位置关系。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-6；</li> <li>2. 会用待定系数法求与已知直线平行（或垂直）的直线方程，会求两条平行直线间的距离；</li> <li>3. 会用待定系数法求圆的标准方程和一般方程，会根据圆的方程求圆心坐标和半径；</li> <li>4. 会求圆的切线方程，会求直线与圆的相交弦长；</li> <li>5. 能通过数学建模解决与直线方程、圆的方程有关的简单实际问题。</li> </ol>

续表

课程内容	质量描述	
	水平一	水平二
复数及其应用	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能描述复数及相关概念，会求已知复数的实部、虚部，能描述一个复数表示实数、纯虚数的条件，会判断两个复数是否相等，会求共轭复数；</li> <li>2. 能进行复数代数形式的加、减、乘、除四则运算；</li> <li>3. 会用坐标表示复数，会求复数的模。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-3；</li> <li>2. 会进行复数的代数形式与三角形式的互化，会进行复数三角形式的乘除运算；</li> <li>3. 会在复数范围内解实系数一元二次方程。</li> </ol>
简单几何体	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会根据实物抽象出简单几何体，画出简单几何体的三视图；</li> <li>2. 会用斜二测画法画出水平放置的平面图形和简单几何体的直观图；</li> <li>3. 会用公式求直棱柱、正棱锥的表面积；</li> <li>4. 会用公式求圆柱、圆锥、球的表面积；</li> <li>5. 会用公式求柱、锥、球的体积。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-5；</li> <li>2. 能根据三视图绘制简单几何体的直观图；</li> <li>3. 会推导直棱柱、正棱锥的侧面积公式；</li> <li>4. 能利用柱、锥、球的表面积公式和体积公式解决简单实际问题。</li> </ol>
概率与统计初步	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会判断随机事件；</li> <li>2. 会判断随机事件中的基本事件和古典概型；</li> <li>3. 能用加法公式计算互斥事件的概率；</li> <li>4. 会在实际的统计问题中认识总体、个体、样本和样本容量等概念，会做简单随机抽样、系统抽样和分层抽样；</li> <li>5. 会对样本数据进行分析，能用公式及计算工具求样本的均值、方差和标准差；</li> <li>6. 会绘制频率分布表和频率分布直方图。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-6；</li> <li>2. 能抽象出互斥事件的特征；</li> <li>3. 能辨识简单随机抽样、系统抽样和分层抽样的联系与区别，会根据实际需要选择恰当的抽样方法；</li> <li>4. 能根据数据特征选用恰当的统计图表并加以绘制。</li> </ol>

课程内容	质量描述	
	水平一	水平二
极限与连续	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会将复合函数分解成基本初等函数；</li> <li>2. 会计算常见数列的极限；</li> <li>3. 会利用极限的运算法则计算常见函数的极限；</li> <li>4. 会借助两个重要极限求解两类常见极限问题；</li> <li>5. 会利用无穷小的性质求常见函数的极限；</li> <li>6. 会判断函数是否为连续函数；</li> <li>7. 会求常见函数的间断点。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-7；</li> <li>2. 能够理解和运用极限思想；</li> <li>3. 会求复合函数的极限。</li> </ol>
导数与微分	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能利用基本初等函数的求导公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数；</li> <li>2. 会求复合函数的导数；</li> <li>3. 会求简单函数的二阶导数；</li> <li>4. 能辨识简单的 <math>\frac{0}{0}</math> 和 <math>\frac{\infty}{\infty}</math> 型未定式；</li> <li>5. 能利用导数判断函数的单调性，会求函数的单调区间；</li> <li>6. 会求简单函数的极大值和极小值；</li> <li>7. 会求简单函数的最大值和最小值；</li> <li>8. 能初步利用导数解决实际问题；</li> <li>9. 会求简单函数的微分。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-9；</li> <li>2. 会判断曲线的凹凸性并求出拐点；</li> <li>3. 会用洛必达法则求未定式的极限；</li> <li>4. 能用微分进行近似估算。</li> </ol>
积分及其应用	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会求简单函数的不定积分；</li> <li>2. 会用换元积分法和分部积分法求函数的不定积分；</li> <li>3. 会利用积分表查找一些复杂函数的不定积分；</li> <li>4. 会用换元积分法和分部积分法求相关函数的定积分；</li> <li>5. 能利用定积分计算简单平面图形的面积。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-5；</li> <li>2. 能利用定积分计算旋转体的体积；</li> <li>3. 能用定积分解决一些简单实际问题。</li> </ol>

## 附录 4

### 拓展模块一学业质量要求

课程内容	质量描述	
	水平一	水平二
排列组合与二项式定理	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会用两个计数原理计算完成一件事的方法总数；</li> <li>2. 会用排列数公式进行计算；</li> <li>3. 会用组合数公式进行计算，会用组合数的性质进行组合数的化简；</li> <li>4. 会展开二项式，会用二项展开式的通项公式求展开式中的各项。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-4；</li> <li>2. 会通过数学建模解决与排列组合有关的简单实际问题；</li> <li>3. 能通过实例感知二项式系数的性质。</li> </ol>
逻辑代数初步	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会进行十进制数与二进制数的互化；</li> <li>2. 能判断一个语句是否是命题，能用逻辑联结词构造复合命题；</li> <li>3. 会进行逻辑变量的与运算、或运算、非运算；</li> <li>4. 能够列出简单逻辑式的真值表；</li> <li>5. 会用逻辑运算律化简逻辑式。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-5；</li> <li>2. 会化简与证明较复杂的逻辑式；</li> <li>3. 能用逻辑表达式表示生产生活中的逻辑关系。</li> </ol>
立体几何	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能用平面的基本性质判断空间点、线、面之间的位置关系；</li> <li>2. 会用自然语言、符号语言、图形语言描述长方体中直线与直线的位置关系，会描述两条异面直线所成的角，会求正方体中两条异面直线所成的角；</li> <li>3. 会用自然语言、符号语言、图形语言描述长方体中直线与平面的位置关系，会描述直线与平面所成的角；</li> <li>4. 会用自然语言、符号语言、图形语言描述长方体中平面与平面的位置关系，会描述二面角及二面角的平面角。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-4；</li> <li>2. 会求简单几何体中两条异面直线所成的角；</li> <li>3. 会用直线与平面平行、直线与平面垂直的判定定理和性质定理进行简单的推理和证明，会求长方体中直线与平面所成的角；</li> <li>4. 会用平面与平面平行、平面与平面垂直的判定定理和性质定理进行简单的推理和证明。</li> </ol>

续表

课程内容	质量描述	
	水平一	水平二
圆锥曲线	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会借助几何直观感知椭圆的定义及有关概念，会根据条件求椭圆标准方程，会用椭圆标准方程分析椭圆的几何特征；</li> <li>2. 会借助几何直观感知双曲线的定义及有关概念，会根据条件求双曲线标准方程，会用双曲线标准方程分析双曲线的几何特征；</li> <li>3. 会借助几何直观感知抛物线的定义及有关概念，会根据条件求抛物线标准方程，会用抛物线标准方程分析抛物线的几何特征。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-3；</li> <li>2. 会用椭圆、双曲线、抛物线的图象和性质解决有关问题；</li> <li>3. 会判断直线与圆锥曲线位置关系，能运用圆锥曲线的几何性质求解有关问题。</li> </ol>
线性代数初步	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会进行矩阵的加法、减法、数乘、乘法运算；</li> <li>2. 会求二阶、三阶行列式及简单高阶行列式的值；</li> <li>3. 能用初等变换解不多于三元的线性方程组。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-3；</li> <li>2. 会求逆矩阵；</li> <li>3. 会用矩阵解简单线性规划问题。</li> </ol>
常微分方程	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会利用直接积分法求形如 <math>y^{(n)} = f(x)</math> 的微分方程的解；</li> <li>2. 会解可分离变量的微分方程、一阶线性微分方程，能根据初始条件求一阶线性微分方程的特解；</li> <li>3. 会解二阶常系数齐次线性微分方程，能根据初始条件求二阶常系数齐次线性微分方程的特解；</li> <li>4. 能从实际问题中抽象出微分方程模型解决简单实际问题。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-4；</li> <li>2. 能用常数变易法解一阶线性微分方程；</li> <li>3. 能根据特征根的三种不同情形归纳二阶常系数齐次线性微分方程的通解。</li> </ol>

续表

课程内容	质量描述	
	水平一	水平二
三角计算	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会用两角和与差的余弦公式、正弦公式求值、化简和证明，会用两角和与差的正切公式求值；</li> <li>2. 会用二倍角公式求值、化简和证明；</li> <li>3. 会描述正弦型函数与正弦函数之间的关系，会用“五点法”画正弦型函数在一个周期内的简图；</li> <li>4. 会用正弦定理和余弦定理理解三角形。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-4；</li> <li>2. 会画正弦型函数的简图，能根据正弦型函数的图象归纳其性质；</li> <li>3. 会运用三角知识解三角形；</li> <li>4. 能通过数学建模解决与三角计算有关的简单实际问题。</li> </ol>
统计	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能由样本特征推断总体特征，会通过样本数据估计总体特征；</li> <li>2. 能感知两个变量之间的线性相关关系；</li> <li>3. 会借助计算机软件求简单的回归直线方程。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-3；</li> <li>2. 会用一元线性回归模型对有关问题进行预测。</li> </ol>
数据表格信息处理	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 能制作数据表格，会用表格和数据的图示来记录和读取数据信息；</li> <li>2. 会用数组表示数据表格中的信息，会用数字数组的运算法则进行数组的加、减、数乘及内积运算；</li> <li>3. 会根据所提供数据的特点选择恰当的图示，制作饼图、直方图、折线图；</li> <li>4. 会用 Excel 制作数据表格，绘制饼图、直方图、折线图等。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-4；</li> <li>2. 能正确读取数据表格和数据图示中的信息并作简要分析，解决生产生活中的简单实际问题。</li> </ol>

续表

课程内容	质量描述	
	水平一	水平二
算法与程序框图	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会正确书写赋值语句；</li> <li>2. 能识别框图符号及功能；</li> <li>3. 会用程序框图的三种逻辑结构解决简单问题；</li> <li>4. 能识别一些解决简单问题的程序框图所表示的算法。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-4；</li> <li>2. 能用程序框图表示一些简单问题的算法；</li> <li>3. 能通过数学建模解决与算法有关的简单实际问题。</li> </ol>
坐标轴平移与参数方程	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会用坐标轴平移的坐标变换公式求点在新旧坐标系中的坐标；</li> <li>2. 会求简单曲线（如直线、圆等）的参数方程，能将一些简单曲线的参数方程化为普通方程。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-2；</li> <li>2. 能用坐标轴平移的坐标变换公式化简常用曲线的方程；</li> <li>3. 能进行简单曲线的参数方程与普通方程的互化；</li> <li>4. 能选取适当的参数，求曲线的参数方程。</li> </ol>
多元函数微分及其应用	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会表示空间点的坐标；</li> <li>2. 会求简单二元函数的定义域；</li> <li>3. 会求简单二元函数的极限；</li> <li>4. 会求简单二元函数的偏导数。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-4；</li> <li>2. 会求二元函数的全微分。</li> </ol>

续表

课程内容	质量描述	
	水平一	水平二
二重积分及其应用	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会用联立不等式表示平面区域；</li> <li>2. 会计算简单的二重积分；</li> <li>3. 会用二重积分计算平面图形的面积和曲顶柱体的体积。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-3；</li> <li>2. 能选择积分次序求二重积分，会改变二次积分的顺序；</li> <li>3. 能利用二重积分初步解决物理、力学、几何、工程技术等领域中与专业结合的简单实际问题。</li> </ol>
概率统计(续)	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会运用条件概率公式、概率乘法公式和全概率公式；</li> <li>2. 能区分互斥事件、对立事件，会运用概率的加法公式；</li> <li>3. 会计算简单离散型随机变量的分布列。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-3；</li> <li>2. 会依据样本数据分析，判断数据是否服从二项分布或正态分布。</li> </ol>
无穷级数	<p>在熟悉的单一情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 会判断级数的收敛与发散；</li> <li>2. 会用比较判别法和比值判别法判断正项级数的敛散性。</li> </ol>	<p>在熟悉的关联情境中：</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 达到水平一的 1-2；</li> <li>2. 会求简单幂级数的收敛半径和收敛域。</li> </ol>

## 附录 5

### 教学案例

本附录提供了一些教学案例，这些案例主要针对某一具体的知识点（群）设计，并经过了实际教学的检验。案例题材主要涉及教学设计创新、探究性学习、课程思政、专业或生活应用、数学与社会发展、数学文化等方面，将知识传授、价值塑造与核心素养培育融为一体，可以帮助教师准确把握课程标准要求，完成课程任务目标，改进教学设计，提升课堂教学能力，提高课程教学效率，促进学生数学核心素养和终身可持续发展能力的有效提升。

#### 案例 1 集合的概念

**【目的】**通过对现实世界研究对象的分析、概括、归纳和抽象引出集合的概念，借助问题串引导学生开展探究性学习，理解集合的概念，明确集合元素的特性，体验概念的形成过程中蕴含的归纳、抽象、一般化等思想方法，加深学生对集合概念的理解。

**【内容】**俗话说：“物以类聚，人以群分。”人们往往以“类”为单位，把同一类事物作为一个整体加以认识。例如，商店通常把同类商品放在一起；运动会入场式时，解说员通常以代表队为单位介绍各代表队和相关运动员。

**思考：**从数学角度，我们可以用一个怎样的概念来刻画这些以“类”为特征的事物？

**归纳：**由某些确定的对象所组成的整体叫做集合。集合中每个确定的对象叫做这个集合的元素。

**活动 1** 下列对象能否组成集合？如果能，它们的元素分别是什么？

- (1) 中国古代四大发明；
- (2) 方程  $x^2 - 1 = 0$  的所有解；
- (3) 所有等腰三角形；
- (4) 平面内到坐标原点距离等于 6 的所有的点；
- (5) 1-20 以内的所有质数；

(6) 本班的全体学生。

总结归纳：以上这些对象都是确定的，所以都可以组成集合。

活动 2 思考下列问题，你认为集合的元素必须具备哪些特性？

问题 1：甲、乙两生分别统计班里高个子学生人数，但得到的结果却不一样，你能分析一下背后的原因吗？中国著名的科学家、充分接近 0 的实数能否构成集合？为什么？

总结归纳：通过与活动 1 中的实例比较可得，问题 1 中的研究对象没有明确的标准，不具有确定性，因此不能构成集合。集合的元素具有确定性。

问题 2：如果某班班委由 A、B、C、D、E、F 等 6 个学生组成，团支委由 A、B、G、H、I 等 5 个学生组成，那么该班班委及团支委干部由哪些学生组成？共有多少个？

总结归纳：同一个集合中的元素之间是互不相同的，相同元素并入同一集合时只能作为一个元素。集合的元素具有互异性。

问题 3：甲、乙、丙 3 人组成的集合与丙、乙、甲 3 人组成的集合一样吗？怎样判定两个集合是否相等？

总结归纳：如果两个集合的元素完全相同，那么这两个集合是相等集合。集合的元素具有无序性。

【分析】集合是数学中的一个基本概念，需要借助元素的三个特性来表征。通过设计问题串，引导学生开展探究性学习，在归纳集合元素三个特性的过程中加深对集合概念的理解，可以有效地化解集合的概念这个教学难点。

集合概念的形成，经历了由具体到抽象、由特殊到一般的发展过程，有利于培养和提升学生数学抽象、逻辑推理等核心素养。

## 案例 2 一元二次不等式的解法

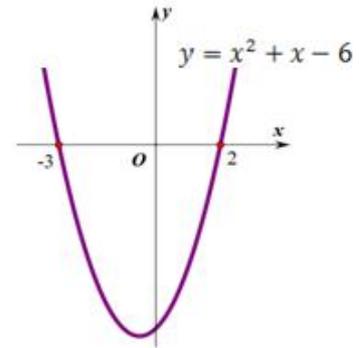
【目的】通过对一元二次方程解法的回顾和对二次函数图象的分析，设计一系列的问题，引导学生开展探究性学习，得到相应的一元二次不等式的解集。通过对二次函数图象与  $x$  轴位置关系的分析，得出解一元二次不等式的共性方法，建立前后知识的联系，提高分析问题解决问题的能力。

【内容】在初中我们学习过一元二次方程的解法，学习过二次函数并能作出

它们的图象。

活动1 思考下列问题，你能得出什么样的结论？

问题1：观察二次函数  $y = x^2 + x - 6$  的图象。



(1) 当  $x$  为何值时， $y = 0$ ？

(2) 二次函数  $y = x^2 + x - 6$  的图象被  $x$  轴分成了上下两个部分。

$x$  轴上方的图象对应的  $y$  \_\_\_\_\_  $0$ ，此时图象对应的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

$x$  轴下方的图象对应的  $y$  \_\_\_\_\_  $0$ ，此时图象对应的  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

问题2：根据问题1，完成下列填空。

(1) 不等式  $x^2 + x - 6 > 0$  的解集为\_\_\_\_\_。

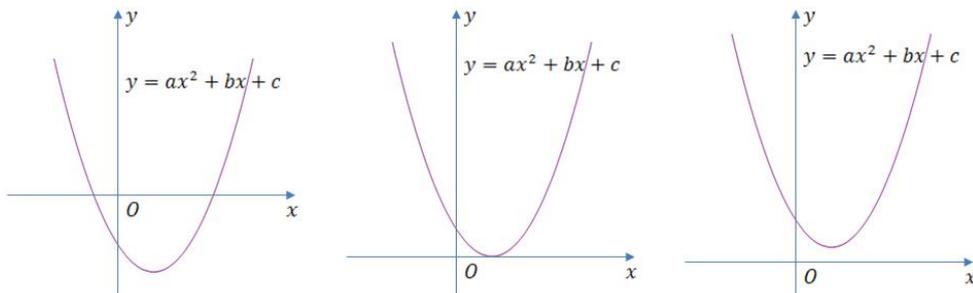
(2) 不等式  $x^2 + x - 6 < 0$  的解集为\_\_\_\_\_。

(3) 不等式  $x^2 + x - 6 \geq 0$  的解集为\_\_\_\_\_。

(4) 不等式  $x^2 + x - 6 \leq 0$  的解集为\_\_\_\_\_。

总结归纳：二次函数  $y = x^2 + x - 6$  的图象与  $x$  轴交点的横坐标即为方程  $x^2 + x - 6 = 0$  的解。二次函数  $y = x^2 + x - 6$  的图象在  $x$  轴上方（下方）的部分所对应的  $x$  的取值范围就是不等式  $x^2 + x - 6 > 0 (< 0)$  的解集。

活动2 二次函数  $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$  的图象与  $x$  轴可能的位置关系如下图所示。



(1) 请填写下表:

$a > 0, \Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ 的根			
$y = ax^2 + bx + c$ 的图象			
$ax^2 + bx + c > 0$ 的解集			
$ax^2 + bx + c < 0$ 的解集			

(2) 你能归纳出解形如  $ax^2 + bx + c > 0 (\geq 0, < 0, \leq 0) (a > 0)$  的一元二次不等式的一般步骤吗?

总结归纳: 解形如  $ax^2 + bx + c > 0 (\geq 0, < 0, \leq 0) (a > 0)$  的一元二次不等式的一般步骤如下:

- ① 计算  $\Delta = b^2 - 4ac$  并与 0 进行比较, 若  $\Delta \geq 0$ , 求出方程  $ax^2 + bx + c = 0$  的根;
- ② 画出函数  $y = ax^2 + bx + c$  的简图;
- ③ 根据简图写出所求不等式的解集。

**【分析】**借助二次函数的图象分析一元二次不等式的解集, 学生容易理解和接受。通过分析二次函数的图象与  $x$  轴的位置关系, 分类讨论一元二次不等式的解集, 引导学生开展探究性学习, 最终得到一元二次不等式的求解步骤。

一元二次不等式解法的学习, 经历了由特殊到一般和分类讨论的发展过程, 加深了学生对三个“二次”之间关联性的认识, 有利于培养和提升学生的逻辑推理、思想方法等核心素养。

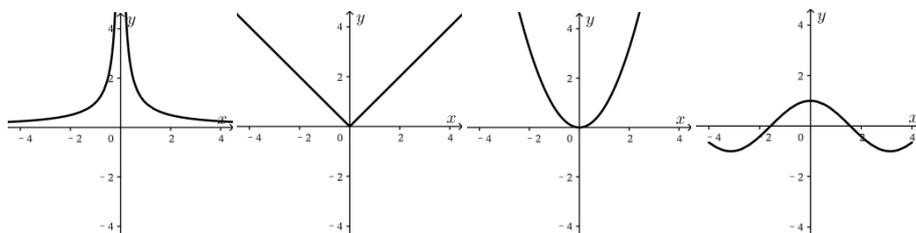
### 案例 3 偶函数的定义

**【目的】**借助一组函数的图象理解偶函数的几何意义, 通过问题串引导学生开展探究性学习, 探讨使用符号语言刻画偶函数的定义, 体验从直观描述到符号表达的抽象过程, 以加深对偶函数定义的理解。

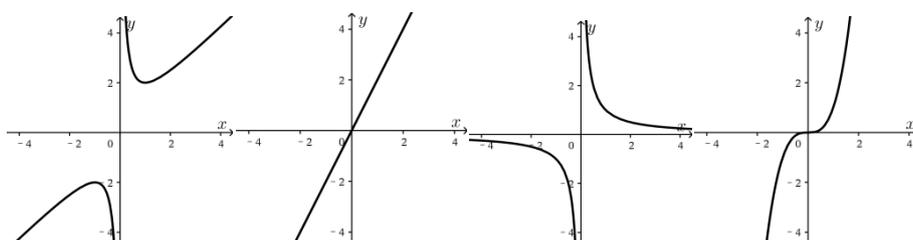
**【内容】**通过生活中的对称元素 (图片或视频) 展示数学美, 引入问题。我们曾经学习过轴对称和中心对称图形, 我们所学习过的函数的图象有些 (关于  $y$

轴或者坐标原点)也具有这样的对称性。

活动 1 下列函数图象分别具有什么样的对称性?



(1) (2) (3) (4)



(5) (6) (7) (8)

总结归纳: 像 (1) (2) (3) (4) 这样, 图象关于  $y$  轴对称的函数是偶函数, 反过来, 偶函数的图象关于  $y$  轴对称。

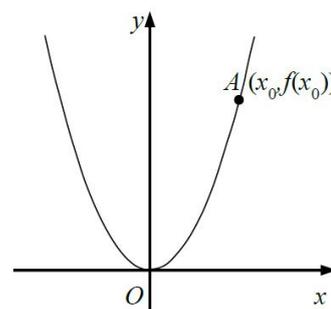
活动 2 如图, 已知函数  $y = f(x)$  是偶函数, 小组合作探究以下问题:

(1) 若点  $A$  是该函数图象上的任意一点, 它关于  $y$  轴的对称点为  $A'$ , 点  $A'$  在这个函数的图象上吗? 为什么? 请在图中标出点  $A'$ 。

(2) 设点  $A$  的坐标为  $(x_0, f(x_0))$ , 你能写出点  $A'$  的坐标吗?

(3) 你认为偶函数的定义域具有怎样的特点?

(4) 如果  $x_0$  是偶函数定义域内的任意一个值,  $f(-x_0)$  与  $f(x_0)$  有怎样的关系?



总结归纳: 一般地, 如果函数  $y = f(x)$  的定义域关于原点  $O$  对称, 并且对于定义域内的任意一个值  $x$ , 都有  $f(-x) = f(x)$  成立, 我们就称函数  $y = f(x)$  为偶函数。

【分析】直观图形语言学生容易理解和接受，但由图形语言过渡到符号语言是一个抽象的过程，是学生认知的难点。通过设计问题串，将抽象的符号语言逐一分解，引导学生开展探究性学习，可以有效化解诸如“对称”“任意”等难点，并通过归纳，最终形成偶函数的定义。

偶函数定义的形成，经历了由具体到抽象、由图形语言到符号语言的发展过程，有利于培养和提升学生的直观想象、数学抽象等核心素养。

#### 案例4 指数函数的单调性

【目的】借助自我激励公式“ $1.01^{365} \approx 37.8$ ， $0.99^{365} \approx 0.03$ ”，帮助学生加深对指数函数  $y = a^x$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) 的理解；通过描点作图和运用数学工具演示帮助学生感知指数函数图象随底数变化而变化的规律，并归纳出指数函数的单调性。

【内容】如果我们把“1”作为每天正常的状态，那么每天多一点努力就是“1.01”，每天多一点惰性就是“0.99”。教室文化墙上的励志公式（如下图）给了我们很多的启发。



活动1 利用数学工具计算不同状态下的相关数据并填表。

$y = a^x$	$x$				
	1	10	30	180	365
$y = 1.01^x$					
$y = 0.99^x$					

总结归纳：励志公式中，当底数  $a = 1.01$  时，随着天数  $x$  的增大，函数值也增大；当底数  $a = 0.99$  时，随着天数  $x$  的增大，函数值反而减小。底数的细微差

异，引起了函数值的巨大变化。

活动 2 在同一坐标系内用描点法作出指数函数  $y = 2^x$ ， $y = 3^x$ ， $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  和  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$  的简图。

(1) 观察图象，随着  $x$  的增大，函数值  $y$  增大的函数有\_\_\_\_\_；随着  $x$  的增大，函数值  $y$  减小的函数有\_\_\_\_\_。

(2) 利用数学软件（如 GeoGebra）演示指数函数的图象，观察底数  $a$  的变化对图象的影响。

(3) 底数  $a$  的取值对指数函数单调性有何影响？

总结归纳：指数函数  $y = a^x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$  中，当  $a > 1$  时，函数值随着自变量的增大而增大，函数在  $\mathbf{R}$  上是增函数；当  $0 < a < 1$  时，函数值随着自变量的增大而减小，函数在  $\mathbf{R}$  上是减函数。

【分析】通过计算填表，呈现励志公式中底数的细微差异引起的巨大数值变化，进而引导学生利用描点法画出指数函数图象，使用计算机软件演示指数函数的图象，展示动态变化过程。借助几何直观了解图象特征、感知变化规律，归纳总结指数函数的单调性。

指数函数单调性的探究，经历通过图形建立直观猜想、通过计算探索变化规律、通过软件验证性质结论的思维与活动过程，数形结合的思想贯穿始终，有利于培养和提升学生数学运算、直观想象、数学精神等核心素养。

### 案例 5 任意角的三角函数

【目的】借助初中所学锐角三角函数的定义，帮助学生理解任意角的三角函数的定义，体验从特殊到一般的抽象过程，感受数学的科学性与严谨性。

【内容】初中阶段已经学习过锐角三角函数的定义，角的概念推广到任意角后，我们需要把锐角的三角函数推广到任意角的三角函数。

活动 如图 1， $\text{Rt}\triangle OAP$  中， $\angle OAP = 90^\circ$ ，以  $O$  为原点， $OA$  所在的直线为  $x$  轴，建立如图所示的直角坐标系。设点  $P$  的坐标为  $P(x, y)$ ， $|OP| = r$ ， $\angle POA = \alpha$ 。

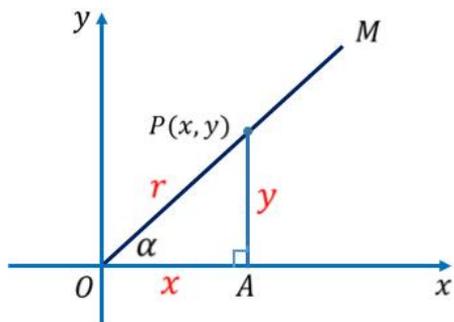


图 1

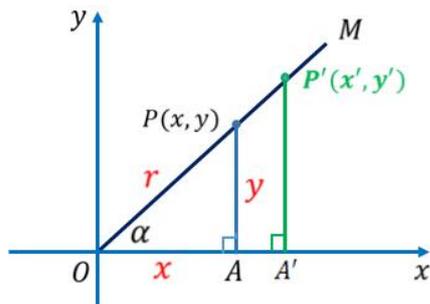


图 2

(1) 试用  $x$ ,  $y$ ,  $r$  表示  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  和  $\tan \alpha$ 。

(2) 设点  $P'$  是射线  $OP$  上异于  $O$ 、 $P$  两点的任意一点 (如图 2), 点  $P'$  的坐标为  $P'(x', y')$ ,  $|OP'| = r'$ , 试用  $x'$ ,  $y'$ ,  $r'$  表示  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  和  $\tan \alpha$ 。

(3) 你能从 (1) (2) 的结论中得到什么启发?

总结归纳: 锐角的三角函数可以用锐角的终边上异于原点的任意一点的坐标来表示, 而任意角的三角函数的定义就是在此意义上的推广。

一般地, 当  $\alpha$  是任意角时, 设  $P(x, y)$  为  $\alpha$  终边上任意一点 (异于原点),

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 我们定义  $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ ,  $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ ,  $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ 。  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  和  $\tan \alpha$

分别叫做角  $\alpha$  的正弦函数、余弦函数、正切函数。

**【分析】**任意角的三角函数的定义比较抽象, 学生难以理解。通过变换初中所学锐角三角函数的表示方法, 引出锐角三角函数的新的定义形式, 并推广到任意角的情形, 可以有效化解教学难点, 并有利于学生理解和识记函数表达式。

任意角的三角函数定义的形成, 经历了形数转换和从特殊到一般的发展过程, 有利于培养和提升学生的数学抽象、逻辑推理等核心素养。

### 案例 6 等差数列的应用

**【目的】**借助五棵松体育馆冬奥改造工程中观众座位的调整问题, 引导学生开展探究性学习, 从实际情境中抽象出等差数列模型, 利用等差数列的相关知识解决简单实际问题。

**【内容】**本着“绿色、共享、节俭、科技”的原则, 将北京奥运会篮球比赛场馆——五棵松体育馆改造升级为冬奥冰球场馆。



问题 1: 观众席 A1 区原有座位 12 排, 第一排有 30 个座位, 此后每一排比前一排多 2 个座位, 那么最后一排有多少个座位? A1 区共有多少个座位?

总结归纳: A1 区每一排的座位数可建构为首项  $a_1 = 30$ , 公差  $d = 2$  的等差数列, 最后一排座位数  $a_{12}$  可以用等差数列通项公式求出, 再利用等差数列前  $n$  项和公式得出 A1 区的座位总数  $S_{12}$ 。

问题 2: 为了将 A1 区扩容至不少于 800 个座位, 假设第一排座位数增加 2 个, 此后每一排比前一排多 2 个座位, 至少需要将座位增设为多少排?

总结归纳: A1 区每一排的座位数可建构为首项  $a_1 = 32$ , 公差  $d = 2$  的等差数列, 扩容后的座位总数即为此数列的前  $n$  项和  $S_n$ , 借助不等式的思想运用等差数列前  $n$  项和公式, 求出座位排数  $n$ 。

【分析】数学模型的构建是学生认知的难点, 通过设置问题引导学生观察北京冬奥会场馆改造工程中座位数特点, 并抽象为等差数列模型, 借助等差数列的相关知识解决问题。

通过数学建模搭建数学与现实的桥梁, 帮助学生感悟等差数列是可以用来刻画现实世界的数学模型, 体验由具体到抽象、由特殊到一般的数学思维过程, 培养和提升学生数学抽象、数学建模、思想方法等核心素养。

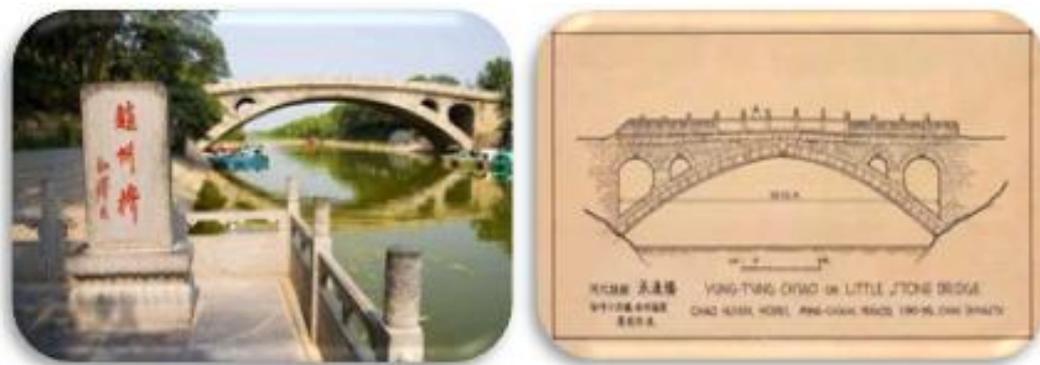
## 案例 7 圆的标准方程

【目的】充分挖掘课程资源开展课程思政。借助赵州桥设计图纸提出问题, 通过建立圆的方程来研究圆的相关问题。通过写出给定条件的圆的标准方程, 熟悉圆的标准方程中各参数的意义, 加深对圆的标准方程的认识和理解。

【内容】通过学生喜闻乐见的实际问题引入课题，展示古代中国人民的智慧，提升民族自豪感。学生合作交流，借助数学软件绘制图形，通过数形结合，进一步理解圆的标准方程。

活动1 赵州桥是世界上现存最早、保存最完善的敞肩石拱桥。

- (1) 这座拱桥建于哪一年？距今已有多少年的历史？建筑师是谁？
- (2) 就图纸中的拱高、跨度等数据，如何求这个拱圆的直径？

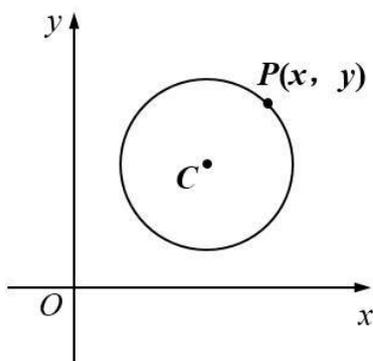


总结归纳：通过查阅相关史料，了解赵州桥的相关历史。通过建立平面直角坐标系，求出圆的方程，研究圆的相关性质。

活动2 如图，在平面直角坐标系中，圆 $C$ 的圆心坐标为 $(a,b)$ ，半径为 $r$ 。

小组合作探究以下问题：

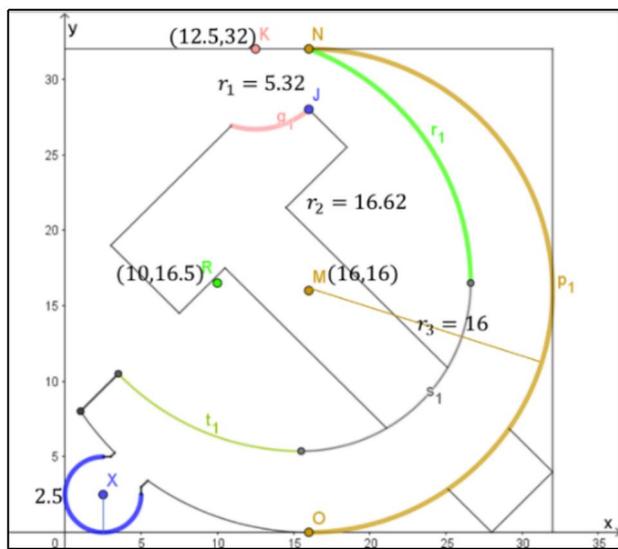
- (1) 若点 $P(x,y)$ 是圆 $C$ 上的任意一点，则点 $P$ 必须满足什么条件？
- (2) 试把点 $P$ 满足的条件用一个数学关系式来表示。
- (3) 化简上述关系式并思考这个关系式与圆 $C$ 有怎样的联系。



总结归纳：以 $C(a,b)$ 为圆心， $r$ 为半径的圆的标准方程为：

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \quad r > 0.$$

活动3 党徽的图形设计中包含了许多圆的因素，根据以下设计图纸，你能写出党徽中圆弧所在的圆 $K$ 、圆 $R$ 、圆 $M$ 及圆 $X$ 的方程吗？



总结归纳：通过练习，学生能够很好地掌握求圆的标准方程的一般方法，并能理解圆的标准方程中各参数的意义。党徽的设计凝聚了我国科学家们的智慧，从科学家们的故事中汲取营养，学生的自豪感油然而生。

【分析】利用赵州桥设计图纸提出问题揭示课题，增强学生的民族自信。通过设计问题串，引导学生自主探究圆的标准方程，初步掌握求曲线方程的一般方法。充分挖掘思政元素，通过写出党徽中圆弧所在的圆的方程，让学生在巩固所学知识的同时，感受数学的应用价值及数学美，把爱党爱国教育融入课堂教学。

圆的标准方程的推导，经历了从具体到抽象的过程，体现了数形结合的数学思想，有利于培养和提升学生的数学抽象、思想方法、数学精神等核心素养。

### 案例8 圆柱、圆锥的侧面展开图

【目的】中国航天人辉煌的航天成绩，点燃了不少人心中的“航天梦”。借助学生对于火箭知识的好奇心，通过探究长征系列运载火箭模型，了解圆柱、圆锥的结构特征，理解圆柱、圆锥的侧面展开图，引导学生弘扬航天精神，刻苦学习、锤炼自己，投身强国建设。

【内容】运用信息化技术展示神舟十三号载人飞船发射取得圆满成功，长征五号运载火箭将火星探测器“天问一号”送入预定轨道，增强民族自信心和自豪

感。

活动1 观察长征五号运载火箭模型，小组合作完成下列问题：

(1) 长征五号运载火箭模型由哪些简单几何体组成？

(2) 将长征五号运载火箭模型主体拆分成几个简单几何体，测量每个几何体的母线长、底面直径和高。

(3) 将(2)中简单几何体侧面沿一条母线剪开，展开成平面图形，分别得到什么图形？

(4) 思考(3)中简单几何体侧面展开图的各边长与对应简单几何体的母线长、高、底面直径是否有联系。

总结归纳：长征五号运载火箭模型由圆柱和圆锥组成。圆柱侧面展开图是一个矩形，矩形一边长是圆柱高，另一边长是圆柱底面周长；圆锥侧面展开图是一个扇形，扇形所在圆的半径是圆锥母线长，扇形弧长是圆锥底面周长。

活动2 小组合作制作长征五号运载火箭模型。

材料：长方形卡纸若干，胶带，直尺，圆规，量角器，剪刀等。

要求：火箭模型主体圆柱高25 cm，底面直径4 cm，顶端圆锥高 $4\sqrt{2}$  cm；助推器圆柱高10 cm，底面直径2 cm，顶端圆锥高 $\sqrt{3}$  cm。

制作提示：长征五号运载火箭模型是由多个圆柱和圆锥组成的，根据条件精确画出各个圆柱、圆锥的侧面展开图，剪裁制作成符合要求的圆柱、圆锥，最后组装即可。

归纳总结：制作步骤如下。

步骤1：计算火箭模型主体圆柱底面周长，以圆柱底面周长和高为两边画矩形并裁剪，将矩形做成主体圆柱。

步骤2：作火箭模型主体顶端圆锥轴截面，由圆锥底面半径 $r$ 和高 $h$ 求圆锥母线长 $l$ ；计算圆锥侧面展开图扇形的弧长，根据圆心角公式求扇形圆心角。

步骤3：以圆锥母线长 $l$ 为半径作圆，量出扇形圆心角，画出扇形并剪裁，将扇形做成圆锥，并与圆柱合体。

步骤4：完成助推器制作，并美化长征五号火箭模型。

【分析】本案例采用“做中学”教学，体现“以学生为主体”的宗旨，学生

在学到知识的同时学会运用知识解决简单实际问题。

圆柱、圆锥的侧面展开图分别是矩形和扇形，将空间几何问题转化为平面几何问题，体现了数学的化归思想；在模型制作过程中，渗透精益求精的工匠精神和严谨的数学精神，有利于培养和提升学生的直观想象、数学运算、思想方法、数学精神等核心素养。

### 案例9 概率的定义

**【目的】**通过抛硬币试验，引导学生运用数据分析和猜想归纳等方法总结实验结果，揭示数据背后蕴含的规律，得出概率定义，体验从直观感知到数学抽象的学习过程，加深对概率定义的理解。

**【内容】**抛一枚均匀硬币，会出现两种可能的结果，“正面（有面值）朝上”或“反面（有花）朝上”。猜想一下，如果重复抛这枚硬币1万次，最终出现“正面朝上”和“反面朝上”的次数会大致相等吗？

#### 活动1 抛硬币试验——直观感知

准备大小相同的均匀硬币若干，每人抛硬币20次（要求抛硬币方法、高度相同），记录“正面朝上”的次数，计算“正面朝上”的频率。试回答下列问题：

（1）每人“正面朝上”的频率是否相同？

（2）若将所有人抛硬币次数和“正面朝上”的次数分别进行累加，观察抛硬币总数逐渐增加时，“正面朝上”的频率是否有规律？

总结归纳：抛硬币试验中，可能出现“正面朝上”，也可能出现“反面朝上”，这是随机现象。当试验次数较少时，“正面朝上”的频率差异较大；当试验次数增多时，频率趋于稳定。

#### 活动2 软件模拟抛硬币——数据分析

试验的次数（1000次，1500次，2000次，…）和“正面朝上”的频率输入在线编辑系统，系统根据数据自动生成“正面朝上”的频率直方图和折线图。试回答下列问题：

（1）观察数据图示，随着试验次数的增加，“正面朝上”的频率是否有规律？

（2）计算机还未发明的时候，科学家们做了成千上万次手抛硬币试验。观察数据表格，“正面朝上”的频率是否有规律？

试验者	试验次数 $n$	正面朝上次数 $m$	正面朝上频率 $\frac{m}{n}$
迪摩根	2048	1061	0.5181
布丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	24000	12012	0.5006
罗曼诺夫斯基	80640	40173	0.4982

总结归纳：对抛硬币实验结果数据分析可知，在大量重复抛硬币试验下，“正面朝上”的频率趋于稳定，且稳定在0.5附近。在大量重复试验中，随机事件  $A$  发生的频率总是接近于某个常数，并在它附近摆动，这个常数叫做随机事件  $A$  的概率。

### 活动3 实验总结——数学抽象

根据上面两次活动的结论，思考下列问题：

- (1) 对比频率和概率定义，随机事件的频率和概率之间有何联系和区别？
- (2) 如果重复抛均匀硬币1万次，最终出现“正面朝上”和“反面朝上”的次数会大致相等吗？

总结归纳：随机事件  $A$  发生的频率，是指在相同条件下重复  $n$  次试验，事件  $A$  发生的次数  $m$  与试验总次数  $n$  的比值。试验次数足够多时，频率会接近于概率，可以看作概率的近似值。频率本身是随机的，在试验前不能确定，而概率是一个确定的常数，与试验次数无关，是客观存在的，在数量上反映了随机事件发生的可能性。从概率角度看，重复抛均匀硬币1万次，最终出现“正面朝上”和“反面朝上”的次数会大致相等。

**【分析】**频率与概率之间既有联系又有区别，是偶然性与必然性的辩证统一，必然性存在于偶然性之中，并凭借大量的偶然性展现出来。从科学家的大量的试验数据中可以感受到他们锲而不舍、求真务实的匠心精神和科学素养。

随机事件的概率定义，经历了由具体到抽象、由猜想到归纳的发展过程，有利于培养和提升学生的直观想象、数据分析、数学精神等核心素养。

## 案例 10 排列组合与二项式定理

【目的】借助问题情境，进一步理解分类计数原理、分步计数原理及其意义，理解排列、组合的概念；在利用排列数公式、组合数公式进行计算的过程中提高数学运算、数学抽象等数学素养；在比较学习中发现二项展开式的特征及二项式系数的性质，在解决简单问题的过程中坚定中华民族的文化自信。

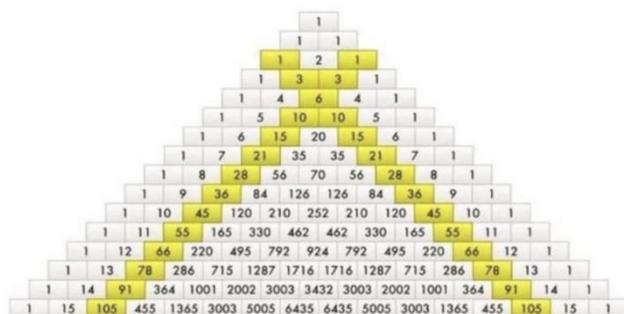
【内容】武广高速铁路（即京广高速铁路武广段，简称武广高铁）于2009年12月26日开通运营。其中武汉站至广州南站间的运营总里程为1069千米，共设置17个车站，最高运营速度可达350千米/小时，为中国正式进入高铁时代的标志。

活动1 武广高速铁路运营之前，运营管理部门根据某两地之间往返的车票不同但票价相同的原则，确定票价并印制车票。

- (1) 计算车票种类数与确定票价数分别是排列问题还是组合问题？
- (2) 运营管理部门需要印制多少种车票？票价有多少种？

总结归纳：对照排列、组合的概念，车票与车站的起点与终点有关，属于排列问题；两站之间的车票的价格是相同的，与起点与终点的顺序无关，属于组合问题。运用分步计数原理得到的排列数  $A_{17}^2$  为车票总数，运用分类计数原理得到的组合数  $C_{17}^2$  为票价总数。当然，我们也可以引导学生通过排列数与组合数之间的关系得出结论。

活动2 杨辉是中国南宋数学家，他在1261年所著的《详解九章算法》一书中提到了“杨辉三角”，这是中国数学史上的一个伟大成就。



“杨辉三角”示意图

- (1) 观察上图，你有什么发现？
- (2) 你能用二项展开式定理验证第10层中的各项数字吗？

总结归纳：通过观察“杨辉三角”示意图，结合排列组合与二项式定理相关概念、计算公式，可以发现一些规律，如：①每行数字左右对称，由1开始逐渐变大；②第 $n$ 行的数字有 $n$ 项，前 $n$ 行共 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个数；③每一行的首末两个数为1；④第 $n$ 行的第 $m$ 个数和第 $n-m+1$ 个数相等；⑤第 $n+1$ 行的第 $i$ 个数等于第 $n$ 行的第 $i-1$ 个数和第 $i$ 个数之和，这恰是组合数的两个基本性质。通过进一步计算与比较，还能发现杨辉三角的第 $n+1$ 行中的每一项依次对应 $(a+b)^n$ 的展开式中的各项系数。可以运用这个结论验证(2)。

**【分析】**分步计数原理、分类计数原理是排列数与组合数计算的依据。利用排列数公式、组合数公式进行数学计算学生容易掌握，但是通过有序和无序来判断具体问题是排列问题还是组合问题需要具体分析。

在二项式定理的简单应用过程中，通过设计以学生为中心的学生活动，引发学生思辨，在解决问题的同时激发学生的民族自豪感，坚定中华民族文化自信，培养和提升学生的数学运算、数学抽象、逻辑推理等核心素养。

### 案例 11 二进制及其转换

**【目的】**借助问题情境，通过再识学生熟悉的十进制数引出相关概念，进而比较研究二进制数，了解二进制的有关概念，理解二进制的按权展开式。通过实例引导学生开展探究性学习，掌握“按权展开求和法”，得到二进制到十进制的快速转换方法。通过介绍我国计算机事业的发展和二进制数产生的历史背景，在渗透数学文化的同时，激发学生的民族自豪感，树立强国有我的信念。

**【内容】**“2021年百度百科”——2021年，公历平年，共365天，53周。中华人民共和国成立72周年，中国共产党成立100周年。

活动1 小组合作探究下列问题：

(1) 2021, 365, …这些数字是几进制数？这种进制进位的规则是什么？日常生活中还有其他进制的数吗？试举例说明。

(2) 十进制数是由哪些数码构成的？

(3) 写出十进制数2021、365、72、100的按权展开式。

总结归纳：在十进制计数中，计数单位分别为个位、十位、百位、千位、万

位、十万位……每个数位上可能有 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 十个数码，数码的个数为 10，即基数为 10；其中个位数表示数值 $10^0$ ，十位数表示数值 $10^1$ ，百位数表示数值 $10^2$ ，千位数表示数值 $10^3$ ……每个位数表示的数值叫位权，即一个数码在每一位上的数字权值的大小；位权通过计算基数的  $n-1$  次幂就可以得到，这里的  $n$  是指位数所在数字中的位置。

活动 2 1956 年 5 月 25 日，我国第一台大型电子模拟计算机复旦 601 型电子积分机（模拟计算机）研究成功；1964 年，我国第一批真正意义上的数字电子计算机，也是世界上独一无二的木架结构计算机——602 电子计算机研究成功；1972 年 12 月 26 日，复旦 719 计算机联调成功……601、602、719、753……从无到有，从有到精，一台台计算机刷新着复旦计算机事业的新高度。试回答下列问题：

- (1) 计算机运用的是几进制？
- (2) 二进制的基数是什么？
- (3) 二进制每个数位上有几个不同的数码？分别是什么？
- (4) 二进制的进位规则是什么？

总结归纳：从我国计算机事业发展和二进制数产生的历史背景引入，结合计算机专业的特点，提出了“二进制”数的概念。通过类比，理解二进制的按权展开式。

活动 3 如图 1，有八只并联的灯泡，功率分别是 1，2，4，8，16，32，64，128（单位：瓦），用“1”表示通电，“0”表示不通电。小组合作探究下列问题：

(1) 如图 2，如果自下而上第 1、4、6 三个灯泡导通，其余不导通。请你用二进制数表示其状态，并求其功率总和。

(2) 若要达到 30 瓦的亮度，需亮哪几个灯泡？

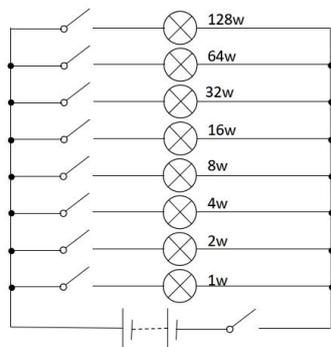


图 1

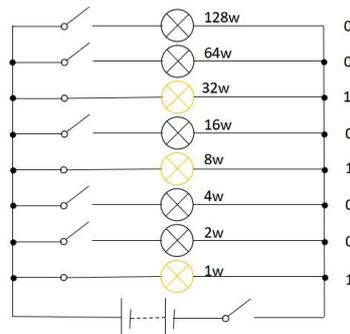


图 2

总结归纳：问题（1）考核二进制的表达以及与十进制之间的关系。用 1 和 0 表示通和不通，对应（自下而上）灯泡的状态为 00101001，总功率是  $1+8+32$ ，它深层的含义就是二进制数 00101001 对应十进制数  $1+8+32=41$ 。解决问题（2），学生一般会通过直接计算得到结果，这就需要教师引导学生将现实问题转化为数学“二进制”模型，再利用所学知识与方法解决问题。

【分析】二进制内容对学生来说是抽象和陌生的，通过学生熟悉的十进制数类比研究二进制数，帮助学生形成概念、理解规则。通过实例引导学生开展探究性学习，掌握“按权展开求和法”，理解“数位状态和位置能够表示数值的大小”，体会“数形结合”等数学思想。通过小组合作学习培养学生的合作、沟通、表达、思辨等能力。

二进制及其转换的学习，经历了由十进制到二进制的类比研究和由直观想象到数学抽象的发展过程，有利于培养和提升学生的数学抽象、数学运算等核心素养。

### 案例 12 线面垂直的判定定理

【目的】设置“装修中检测立柱状玄关是否与地面垂直”这一情境，通过系列问题引导学生展开探究性学习，最后得出直线与平面垂直的判定定理。学生通过合作探究，体验知识发生、发展的过程，最终生成线面垂直的判定定理。

【内容】小白家装修，装修师傅装好了玄关立柱，小白想检测立柱是否与地面垂直。

活动 1 小白用直角三角尺做了一次检测（如图 1），发现立柱与地面上的一条直线垂直。问：立柱与地面一定垂直吗？请小组合作探究。



图 1

总结归纳：学生通过小组合作探究认识到，如果一条直线只和平面内的一条直线垂直，那么这条直线和这个平面不一定垂直。

活动2 一条直线满足什么样的条件才能确保它与已知平面垂直呢？请小组合作探究下列问题：

问题1：如果一条直线和一个平面内的两条直线都垂直，那么这条直线和这个平面垂直吗？

问题2：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线和这个平面垂直吗？



图2

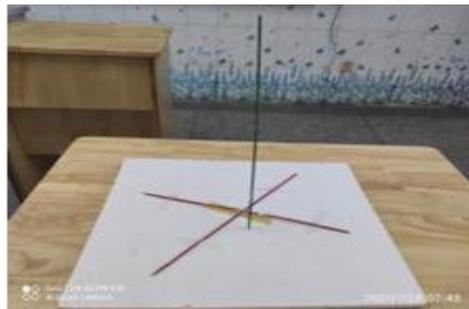


图3

总结归纳：学生通过合作探究发现，一条直线和一个平面内的两条直线都垂直，这条直线不一定和这个平面垂直（如图2），但如果平面内的两条直线是相交直线，那么这条直线就和这个平面垂直（如图3）。由此可得线面垂直的判定定理：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线就和这个平面垂直（如图4）。

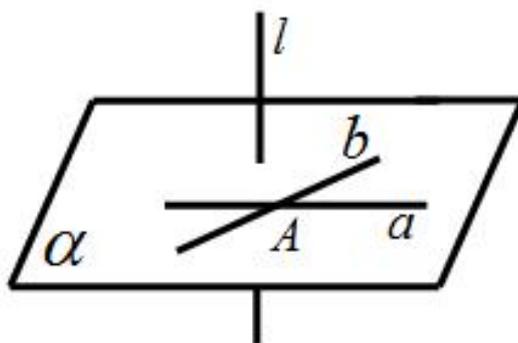


图4

【分析】线面垂直的判定定理比较抽象，证明过程比较复杂（课标不作要求），通过生活实例引入，引导学生开展探究性学习，体验知识的发生、发展过程，让抽象的数学定理活起来，让数学课堂动起来，最终直观理解定理内容。

线面垂直的判定定理的形成，经历了由具体到抽象、由猜想到归纳的发展过程，有利于培养和提升学生的直观想象、数学抽象、逻辑推理等核心素养。

### 案例 13 椭圆的概念

**【目的】**通过嫦娥卫星的运行轨道分析和日常生活中的椭圆模型获得椭圆的直观印象；通过查阅资料了解人类探索圆锥曲线的历程，激发学生的学习兴趣 and 探索欲望；引导学生自主探索、合作探究椭圆的生成过程，形成椭圆概念，体验从感性到理性的认识过程，感受数学的魅力。

**【内容】**通过视频展示嫦娥卫星发射过程、运行轨迹和相关故事，引导学生初步感知椭圆。

活动 1 嫦娥卫星绕月球运行的轨道是什么形状的曲线？说说生活中类似形状的曲线有哪些。

总结归纳：嫦娥卫星绕月球运行的轨道是一个椭圆，日常生活中有大量的椭圆模型，椭圆相关知识的应用十分广泛。

活动 2 查阅资料，说说人类认识圆锥曲线经历了哪些过程。

总结归纳：古希腊人用一个平面去截圆锥，当角度不同时，就可以得到不同的三种曲线，当时称之为亏曲线、超曲线和齐曲线，也就是我们今天说的椭圆、双曲线和抛物线。其中最著名的是古希腊数学家阿波罗尼斯，他的代表作《圆锥曲线论》成书于约公元前 200 年，书中对圆锥曲线做了较系统的研究。在这之后的 1700 年间，人们学习的就是这些纯几何知识，并无新的发现。17 个世纪后，德国天文学家、数学家开普勒发现了宇宙运行的开普勒三定律，其中第一条就是“所有行星绕太阳的轨道都是椭圆，太阳在椭圆的一个焦点上”。从此，人类展开太空探索之旅。

活动 3 小组合作探究以下问题：

问题 1：绳子一端固定在平整草地上，另一端拴着一只小羊，小羊活动的最大边界是什么曲线？

问题 2：绳子两端都固定在草地上（绳长大于两固定点之间的距离），绳上套个小环，环上拴一只小羊，小羊活动的最大边界是什么曲线？试画出小羊活动的最大边界。

问题 3：试用语言描述椭圆的定义。

总结归纳：平面内到两个定点的距离之和等于定长（大于两个定点之间的距离）的点的轨迹是椭圆。

【分析】用现代科技、日常生活实例和数学史料引入椭圆，激发学生的学生兴趣和民族自信。通过问题设计，引导学生合作探究并归纳椭圆的概念，加深学生对椭圆概念的理解，也为圆锥曲线知识体系的生成与建构打好基础。

椭圆概念的形成，渗透了数学史的相关知识和数学的应用，经历了由具体到抽象的发展过程，有利于培养和提升学生的数学抽象、数学精神等核心素养。

#### 案例 14 第二个重要极限

【目的】借助生活案例，引发学生认知冲突，通过计算感悟、几何画板作图、观察、猜想、联想等做中学、做中悟，再通过介绍数学家的探索过程，得出第二个重要极限，体会数学家严谨、求实的治学精神。

【内容】某公司出纳会计小王听说互联网金融理财产品收益很高，他找到理财经理。理财经理对他说，有一款理财产品，年利率100%，计息方式可协商。以1万元为例：

一年计算一次利息，每年的本利和为 $1+1=2$ （万元）；

每半年计算一次利息，利率为 $\frac{1}{2}$ ，每年的本利和为 $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2.25$ （万元）；

每个季度计算一次利息，利率为 $\frac{1}{4}$ ，每年本利和为 $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=2.33141$ （万元）。

活动 1 小王准备购买这款理财产品 1 万元，他想通过增加计息次数的方式达到“一夜暴富”。小组合作探究：

- (1) 若每月计算一次利息，利率为 $\frac{1}{12}$ ，则每年的本利和是多少？
- (2) 若每天计算一次利息，利率为 $\frac{1}{365}$ ，则每年的本利和是多少？
- (3) 若一年计算 $x$ 次利息，利率为 $\frac{1}{x}$ ，则每年的本利和又是多少？
- (4) 根据上面的计算结果，你能得到什么启示？

总结归纳：一年计算 $x$ 次利息，每年的本利和是 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 万元。通过计算可

知，随着计息次数的增加，每年的本利和也在增加，但增加的幅度在逐步放缓。

活动2 小王想，一年计算 $x$ 次利息，每年的本利和是 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 万元。在这个指数式中，底 $\left(1+\frac{1}{x}\right)$ 大于1，指数 $x$ 无限增大（即 $x \rightarrow +\infty$ ）时， $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的值也一定会随 $x$ 无限增大而无限增大，他就可以实现“暴富”的目标了。小组合作探究：小王的“暴富”目标能实现吗？

(1) 观察以下表格数据并思考：

$x$	3	4	100	1000	10000	100000	1000000
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.3704	2.44141	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827	2.71828

①随着 $x$ 的增大，函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的值变化趋势是怎样的？

②当 $x$ 无限增大时，函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 有极限吗？试猜想一下。

(2)用几何画板动态演示函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$  ( $x > 0$ )的图象，你能发现什么？

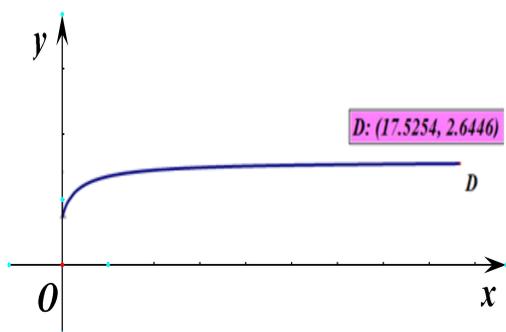


图1

总结归纳：随着 $x$ 的增大，函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的值也在增大，但增加的幅度会变缓；当 $x$ 无限增大时，函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 有极限，且这个极限在2到3之间，小王的“暴富”目标是不可能实现的。只有通过勤奋学习，刻苦钻研，掌

握一技之长，用勤劳的双手才能实现致富梦想。

### 活动3 拓展阅读——追e寻根

在很早以前，不少数学家就已经开始研究  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  这个极限。著名数学家雅科布·贝努利 1683 年在研究时也发现这个常数在 2 到 3 之间，但无法给出这个数。后来瑞士数学家欧拉研究时发现， $x \rightarrow -\infty$  时， $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  也趋近于同一个常数（如图 2）。

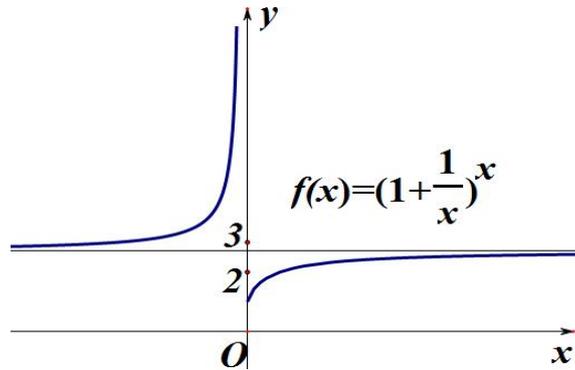


图 2

1728 年欧拉首先用  $e$  表示这个极限，即  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ，并证明了  $e$  是一个无理数， $e = 2.718281828459\dots$ 。

总结归纳：在没有信息化设备的条件下，数学家们得出  $e$  这样一个无理数，可见他们对真理的追求是何等的执着，对科学的研究是何等的严谨，这些都值得我们认真学习和反思。

### 活动4 专业链接

财经专业中，经常要计算利息，设本金为  $P$ ，年利率为  $r$ 。若一年分  $n$  次计息，则每期利率为  $\frac{r}{n}$ ，一年后的本利和  $P_1 = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$ ，第  $k$  年后的本利和为  $P_k = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{kn}$ 。若计息期数  $n \rightarrow +\infty$ ，则上述本利和就称为连续复利本利和，第  $k$  年后的连续复利本利和公式为

$$P_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} P \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{kn} = \lim_{n \rightarrow +\infty} P \left[ \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{\frac{n}{r}} \right]^{rk} = P \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{r}{n} \right)^{\frac{n}{r}} \right]^{rk} = P e^{rk}。$$

【分析】第二个重要极限是教学难点，教学中通过计算及图形演示直观感知“随着  $x$  的增大， $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  也在增大，但增速变缓”的现实，再通过数学家探究

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  的值并最终将其确定为  $e$  的历程，让学生了解这个极限公式，有效

化解教学难点。同时开展课程思政，引导学生学习数学家追求真理的科学精神，体会数学的应用价值。

第二个重要极限的教学经历了由直观到抽象的思维历程，有利于培养和提升学生的数学抽象、数学运算、数学精神等核心素养。

### 案例 15 导数的概念

【目的】借助微波雷达测速实例，通过问题串和 GeoGebra 软件演示，引导学生探究平均速度与瞬时速度之间的关系，感受瞬时速度是平均速度的极限，体验从直观描述到符号表达的抽象过程，加深对符号语言刻画的导数定义的理解。

【内容】通过神舟十三号载人飞船与空间站组合体成功实现自主快速交会对接的视频，引入情境问题。此次神舟十三号的整个对接工作非常顺利，“对接神器”微波雷达居功至伟。微波雷达精准测量运动物体每时每刻的速度特性，不仅在航天事业上广泛应用，在日常生活中也有诸多应用，如微波雷达测汽车速度等。

活动 1 影响刹车距离的最主要因素是行车速度和车轮与路面的摩擦系数。某汽车在平整公路上的刹车距离  $S$  (m) 与时间  $t$  (s) 的关系式为  $S = -5t^2 + 20t (0 \leq t \leq 2)$ 。该汽车在紧急刹车的过程中，不同时刻的速度是不同的。小组合作探究微波雷达是如何测算汽车的瞬时速度的。

(1) 计算  $t_0 = 1\text{s}$  到  $t = 1.1\text{s}$ ,  $1.01\text{s}$ ,  $1.001\text{s}$ ,  $1.0001\text{s}$  各时间段内位移改变量和平均速度，并填入下表：

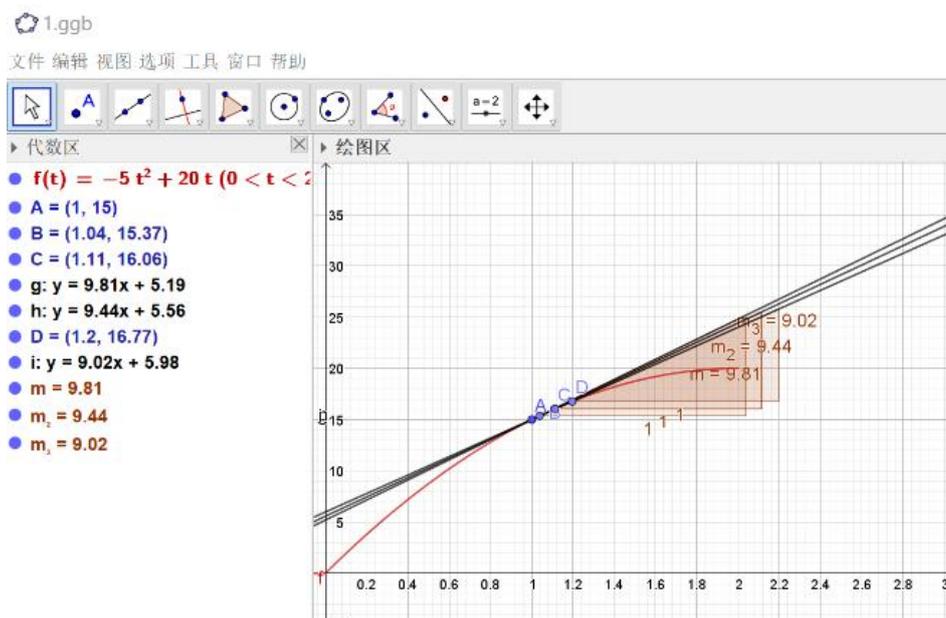
$t_0 \sim t$	$\Delta t = t - t_0$	$\Delta S = S(t) - S(t_0)$	$\bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$
1~1.1	0.1	0.95	9.5
1~1.01	0.01	0.0995	9.95
1~1.001	0.001	0.009995	9.995
1~1.0001	0.0001	0.00099995	9.9995
1~1.00001	0.00001	0.0001	10

(2) 从上表中你能看出，当  $\Delta t$  越来越小即  $t$  越来越接近  $t_0$  时，汽车的平均速度有什么变化规律？

(3) 若  $\Delta t$  以任何方式趋近于 0，汽车的平均速度是否都趋于 10m/s？

(4) 借助 GeoGebra 软件绘出函数  $S = -5t^2 + 20t (0 \leq t \leq 2)$  的图象，拖动图象

上的点让其逼近点  $A(1,15)$ ，观察图象中平均变化率  $\frac{\Delta S}{\Delta t}$  的变化情况，你能得出什么结论？



(5) 你能计算该汽车在任意时刻  $t$  的瞬时速度吗？

总结归纳：从上表中可以看出，当  $\Delta t$  越来越小即  $t$  越来越接近  $t_0$  时，汽车的平均速度越来越接近 10m/s。

设  $t$  为  $t_0 = 1$  的邻近时刻，则汽车在时间段  $[t, 1]$  或  $[1, t]$  上的平均速度

$$v = \frac{S(t) - S(1)}{t - 1},$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(1 + \Delta t) - S(1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-5(1 + \Delta t)^2 + 20(1 + \Delta t) - 15}{\Delta t} = 10,$$

即  $\Delta t$  以任何方式趋近于 0，汽车的平均速度都趋于 10m/s。

借助 GeoGebra 绘图软件的演示，可以同样得出这个结论。该汽车在任意时刻  $t$  的瞬时速度可表示为  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ 。微波雷达测算汽车的瞬时速度就是

采用了上述原理。

活动 2 根据活动 1 的经验，小组合作探究：

- (1) 猜想函数  $y = f(x)$  在  $x = x_0$  处的瞬时变化率；
- (2) 归纳导数的定义。

总结归纳：函数  $y = f(x)$  在  $x = x_0$  处的瞬时变化率为  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

(前提：此表达式有意义)。

一般地，设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域内有定义，若  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

存在，则称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处可导，并称这个极限为函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处

的导数，记作  $y'|_{x=x_0}$ ，即  $y'|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 。

【分析】汽车在某一刻的瞬时速度是学生认知的难点，学生容易理解的是汽车在某一时段的平均速度。通过设计问题串，从平均速度出发，引导学生尝试用平均速度逼近瞬时速度，利用 GeoGebra 软件直观演示，将抽象的符号语言逐一

分解，有效化解诸如“ $\Delta x \rightarrow 0$ ”“ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  存在”等难点，并通过归

纳，最终形成导数的定义；通过新时代热点情境激发学生的爱国情怀和学习兴趣，感受勇于探索、追求真理的科学精神。

导数定义的形成，经历了由具体到抽象、由特殊到一般、由无限到有限的发展过程，有利于培养和提升学生的思想方法、数学抽象、数学精神等核心素养。

## 案例 16 定积分的概念

【目的】结合实例，以求曲边梯形的面积为数学任务，通过探究分割、近似、求和、取极限的全过程，经历从具体的直观描述到符号语言的抽象过程，加深对定积分概念的理解，感悟其中的思想方法，体会定积分在表达和解决实际问题中的作用。

【内容】我们已经会计算三角形、圆等规则图形的面积。在生产实践和科学研究中有时也需要计算不规则图形的面积，如在研究植物光合作用时，需要计算叶片的面积；在测量河流的流量时，需要测出河床的断面面积；在数学研究中也会遇到计算  $y=x^2$ 、直线  $x=1$  和  $x$  轴所围成图形的面积（如图 1）。

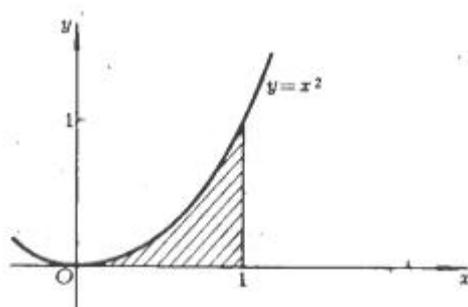


图 1

活动 1 小组合作探究：

(1) 图 2 中的三个图形分别是什么图形？

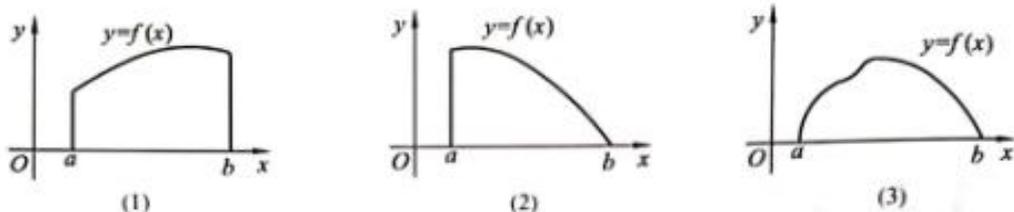


图 2

(2) 你能估算由连续曲线  $y=f(x)(f(x)\geq 0)$  和  $x=a, x=b$  及  $y=0$  围成的曲边梯形（如图 3 (1)）的面积吗？

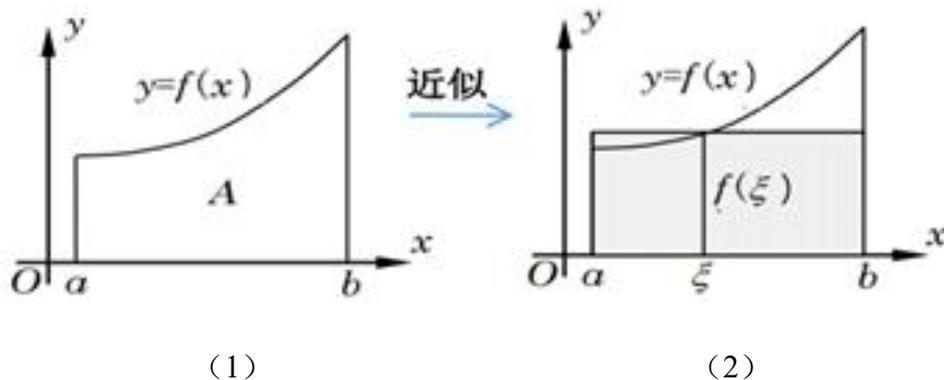


图 3

总结归纳：图 2 中的三个图形都是曲边梯形，其中（1）是由三条直线  $x=a, x=b, y=0$  及一条曲线  $y=f(x)$  围成的曲边梯形，（2）和（3）是直线  $x=a$  和  $x=b$  中一条或两条退缩为一点的特殊情况，这时仍把这种图形叫曲边梯形。

我们可以计算矩形、梯形等规则图形的面积，可以尝试用替代的方法对曲边梯形面积进行近似计算。如图 3（2），用区间  $[a, b]$  的长度  $b-a$  为宽，高为  $f(\xi) (a < \xi < b)$  的矩形面积作为  $A$  的近似值。当然，这样计算的误差可能会比较大。

活动 2 用矩形面积近似代替曲边梯形的面积误差较大，怎样才能减少误差，精确求出曲边梯形的面积？结合图 4，小组合作探究以下问题：

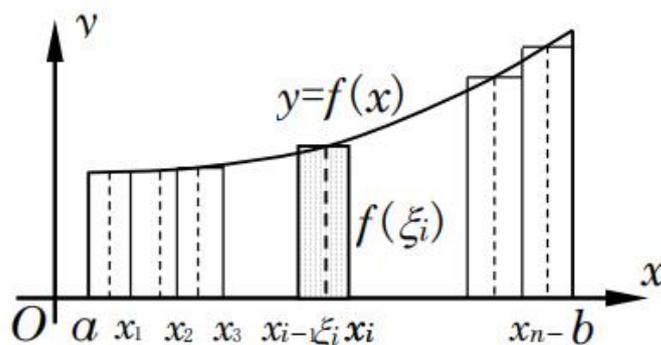


图 4

- （1）怎样将曲边梯形分割为若干个小的曲边梯形？分点之间的距离有没有特殊要求？
- （2）如何近似求出第  $i$  个小曲边梯形的面积？用什么方法？
- （3）怎样近似求出曲边梯形的面积？用什么方法？

(4) 如何准确求出曲边梯形的面积？你能用数学软件演示吗？

(5) 求曲边梯形面积的实质是什么？

总结归纳：计算曲边梯形的面积，一般按照“分割—近似—求和—取极限”的步骤进行。可以先将曲边梯形分割成若干个小曲边梯形，在小曲边梯形中  $f(x)$  的变化很小，可以用相应的小矩形面积近似代替小曲边梯形面积，所有小矩形的面积之和近似看作整个曲边梯形的面积。显然，分割得越细，近似程度就越高，当无限细分时，所有小矩形面积之和的极限就是曲边梯形面积的精确值。因此，求曲边梯形的面积实质上就是求一个和式的极限。

活动3 抽象并归纳定积分的概念。小组合作探究以下问题：

(1) 与求曲边梯形面积类似的问题还有哪些？解决这类问题的共性方法是什么？

(2) 抛开问题的具体意义，函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上要满足什么条件？

(3) 当和式  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$  的极限存在时，其极限值仅与被积函数  $f(x)$  及其积分

分区间  $[a, b]$  有关吗？与区间  $[a, b]$  的分法及  $\xi_i$  点的取法是否有关？

(4) 定积分的值与积分变量与用什么字母表示有关吗？即  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$  是否正确？

(5) 定义中要求  $a < b$ ，当  $a > b$  或  $a = b$  时，定积分有意义吗？

总结归纳：类似的问题很多，如求变速直线运动的路程、非均衡生产的总产量等，所计算的量的实际意义虽然不同，但最后都归结为求一个连续函数在某一个闭区间上的和式的极限问题。定积分既是一个基本概念，又是一种基本思想。定积分的思想即“化整为零：化曲为直—近似代替；积零为整：求和—取极限”，在高等数学、物理、工程技术、其他的知识领域以及生产实践活动中具有普遍的意义。定积分的概念不仅是数学史而且是科学思想史上的重要创举。

【分析】定积分的概念是从具体问题抽象出来的，通过对求曲边梯形面积问题的探究，设计系列子问题，引导学生开展分割、近似、求和、取极限等探究性活动，帮助学生体会化归、类比、极限等思想方法在求解曲边梯形面积问题中的应用，体会用无限分割处理有限面积问题、用离散变量代替连续变量等数学思想

方法，帮助学生在具体问题求解过程中提炼出定积分的定义。

定积分概念的刻画，经历由近似到精确、由具体到抽象、由直观图形到符号语言的过程，有利于培养和提升学生的数学抽象、思想方法、数学建模等核心素养。

### 案例 17 线性方程组的应用

**【目的】**线性方程组是线性代数的重要内容。通过运用线性方程组的知识解决室内设计专业中的相关问题，并运用 Matlab 软件化解繁杂的计算，帮助学生理解如何运用线性方程组和专用软件解决简单实际问题。

**【内容】**学校室内设计工作室接到一项设计工作：为大学生创业孵化楼的部分楼层进行装修设计，装修设计风格可从简约、现代、SOHO 三种风格中选择，同一楼层风格一致。考虑到楼层面积和入驻公司特征，根据装修风格的不同，每层各户型分配要求如下表所示。

风格	户型		
	大户型	中户型	小户型
简约	4	3	2
现代	3	4	6
SOHO	9	6	7

活动 1 如果孵化楼中大、中、小户型总计分别需要 78 间、61 间和 72 间，小组合作探究以下问题：

- (1) 如何列出符合要求的线性方程组？
- (2) 如何解此线性方程组？
- (3) 利用行列式解线性方程组的一般步骤有哪些？

总结归纳：设装修风格中有  $x_1$  层采用简约风格， $x_2$  层采用现代风格， $x_3$  层采用 SOHO 风格，根据题意可得

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 78, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 61, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 72, \end{cases}$$

系数行列式  $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 9 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 31 \neq 0$ ，由克莱姆 (Cramer) 法则可知方程组有唯一

解。

分别求出  $D_i (i=1,2,3)$ ：

$$D_1 = \begin{vmatrix} 78 & 3 & 9 \\ 61 & 4 & 6 \\ 72 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 93, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 78 & 9 \\ 3 & 61 & 6 \\ 2 & 72 & 7 \end{vmatrix} = 124, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 78 \\ 3 & 4 & 61 \\ 2 & 6 & 72 \end{vmatrix} = 186,$$

可得  $x_1 = \frac{D_1}{D} = 3$ ， $x_2 = \frac{D_2}{D} = 4$ ， $x_3 = \frac{D_3}{D} = 6$ 。

所以，简约风格的有 3 层，现代风格的有 4 层，SOHO 风格的有 6 层。

利用行列式解线性方程组的一般步骤有：

第一步，计算方程组的系数行列式  $D$  (若  $D = 0$ ，则此法不可用)；

第二步，分别求出  $D_i$  (把系数行列式第  $i$  列元素对应换成方程组的常数项所得的行列式)；

第三步，代入公式  $x_i = \frac{D_i}{D}$ ，求出方程组的解。

活动 2 对于含有 2 个或 3 个未知数的线性方程组，虽然我们可以手工计算，但是效率不高。小组合作探究，如果运用 Matlab 软件来求解上述问题？

总结归纳：(1) 可以使用 `det(A)` 命令分别求出  $D$ 、 $D_i (i=1,2,3)$ ，再求出

$$x_i = \frac{D_i}{D} (i=1,2,3)。$$

(2) 可以直接使用 `linsolve(A, b)` 命令直接求解 (如下图所示)。

```
>> A=[4 3 9; 3 4 6; 2 6 7];
>> b=[78; 61; 72];
>> x=linsolve(A, b)

x =

     3
     4
     6
```

【分析】线性代数初步内容比较抽象，一般教学中偏重公式运用，计算枯燥繁杂。本案例结合学生专业情境，恰当利用数学专业软件，简化求行列式的繁杂计算，引导学生关注线性代数的应用，提高学生的学习积极性。

通过本案例的学习，有利于培养和提升学生的数学抽象、数学建模等核心素养。

#### 案例 18 可分离变量的微分方程模型建立与求解

【目的】现实世界中的很多问题都可以抽象为常微分方程问题，通过建立可分离变量的微分方程模型，找到未知量之间的函数关系，促进学生对可分离变量的微分方程的理解。通过对微分方程求解，提升学生的数学应用认知，发展学生使用唯物的世界观与科学的方法论去分析和解决问题的能力。

【内容】近些年来，国家出台了相关法律法规，严肃查处酒后驾驶机动车的行为。

活动 1 某市发生一起交通事故，在事故发生 3 小时后，测得司机血液中的酒精含量是 30(mg/100ml)，又过 2 小时后，测得其血液中的酒精含量降为 12(mg/100ml)。假设人饮酒后，血液中酒精含量的变化率与血液中的酒精含量成正比，那么事故发生时司机血液中的酒精含量是多少？请小组合作探究：

- (1) 可以建立一个怎样的数学模型？
- (2) 如何求解这个模型？

总结归纳：第一步，建立模型。

设发生事故 $t$ 小时后, 该司机血液中的酒精含量为 $y(t)$  (mg/100ml), 由已知条件, 得

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

其中 $k$ 是小于0的比例常数, 表示血液中的酒精含量随时间的推移递减。

显然,  $y(3)=30$ ,  $y(5)=12$ ,  $y(0)=y_0$ 为事故发生时 ( $t=0$ ) 司机血液中的酒精含量。

第二步, 求解模型。

将 $\frac{dy}{dt} = ky$ 变形为 $\frac{dy}{y} = kdt$ , 两边取不定积分得 $\ln y = kt + C_1$ ,  $y(t) = Ce^{kt}$ , 将

$y(0)=y_0$ 代入, 得 $C=y_0$ , 所以 $y(t)=y_0e^{kt}$ 。

列方程组 $\begin{cases} y_0e^{3k} = 30, \\ y_0e^{5k} = 12, \end{cases}$ 解得 $k \approx -0.458$ , 从而 $y(t) = y_0e^{-0.458t}$ 。

再由 $y_0e^{3 \times (-0.458)} = 30$ , 得 $y_0 \approx 118.5$ 。

结论: 发生事故时, 司机血液中的酒精含量约为 118.5 (mg/100ml)。

活动 2 拓展学习, 思考分析:

- (1) 酒后驾车和醉酒驾车的酒精含量标准, 国家法律是怎么规定的?
- (2) 饮酒或醉酒驾车将面临怎样的处罚?
- (3) 活动 1 中的司机将会面临怎样的处罚?

总结归纳: 机动车驾驶人血液中酒精含量达到 20mg/100ml 不足 80mg/100ml 的, 属于酒后驾车; 血液中酒精含量达到 80mg/100ml 及以上的, 属于醉酒驾车。

饮酒或醉酒驾驶将面临的处罚主要有:

①饮酒后驾驶机动车的, 处暂扣六个月机动车驾驶证, 并处 1000 元以上 2000 元以下罚款。因饮酒后驾驶机动车被处罚, 再次饮酒后驾驶机动车的, 处 10 日以下拘留, 并处 1000 元以上 2000 元以下罚款, 吊销机动车驾驶证。

②醉酒驾驶机动车, 不管情节是否恶劣, 是否造成后果, 都将按照“危险驾驶”定罪, 处以拘役, 并处罚金。

③醉酒驾驶机动车的, 由公安机关交通管理部门约束至酒醒, 吊销机动车驾

驶证，依法追究刑事责任；五年内不得重新取得机动车驾驶证。

④饮酒后或者醉酒驾驶机动车发生重大交通事故，构成犯罪的，依法追究刑事责任，并由公安机关交通管理部门吊销机动车驾驶证，终生不得重新取得机动车驾驶证。

活动 1 中的司机属于醉酒驾车并发生交通事故，将会被依法按照危险驾驶罪定罪，并视交通事故情节追究刑事责任。“喝酒不开车，开车不喝酒”应该始终是每个驾驶者的基本素养。

**【分析】**发展学生的数学抽象能力和建模能力要基于问题解决的过程，教师应该设置相应的情境，让学生体会实际社会情境背后蕴含着的数学知识，学会运用数学模型分析、思考并解决相关问题。本案例依据社会实际问题，探析可分离变量的微分方程模型的建立与应用，达到学以致用目的。数学课程思政一定要与所教学知识具有内在的一致性，不能强加硬塞，通过对数学知识的解析提升学生的方法观，比单纯的思想教育效果更佳。

通过本案例的学习，有利于培养和提升学生的数学抽象、数学建模、思想方法等核心素养。

### 案例 19 运用 Excel 软件解决实际问题

**【目的】**利用一组车速与刹车距离的数据，引导学生运用 Excel 软件画散点图进行数据拟合，构建函数模型，并运用函数模型解决实际问题，提升学生运用数学软件解决实际问题的意识和能力。

**【内容】**在高速公路上驾驶汽车，为了确保行车安全，需要与前车保持一定的车距，即安全距离。安全距离的长短取决于汽车的制动距离，而汽车刹车系统的制动力、车速、车重、路面湿滑情况、驾驶员的应急反应时间等因素对汽车的制动距离长短产生直接影响。

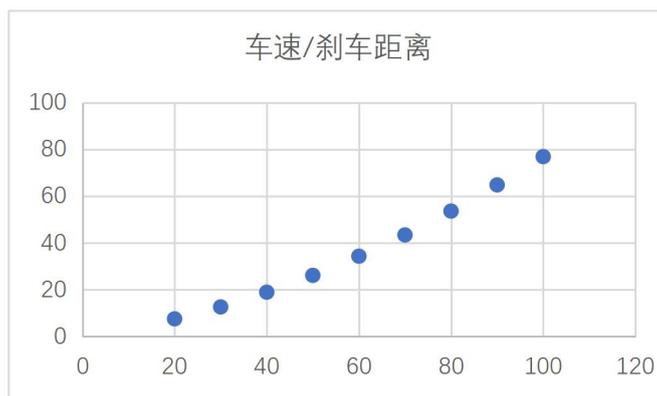
活动 1 某型号普通轿车在正常条件下（常见路面、晴好天气等）行驶速度与刹车距离的实验数据如下表：

车速/(km/h)	20	30	40	50	60	70	80	90	100
刹车距离/m	7.6	12.7	19.0	26.2	34.4	43.5	53.7	64.9	77.0

小组合作探究，如何利用上述数据构建最合适的初等函数模型，得到行驶速度与刹车距离的函数表达式？

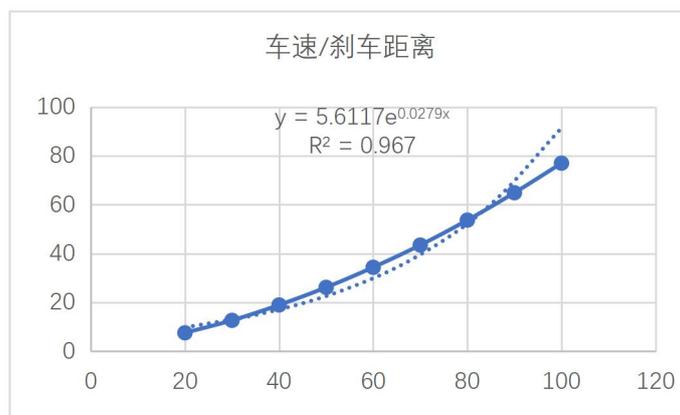
总结归纳：本案例可通过运用 Excel 软件画出散点图，选用适合的初等函数模型与散点图进行数据拟合，从而构建最合适的初等函数模型。具体操作过程如下：

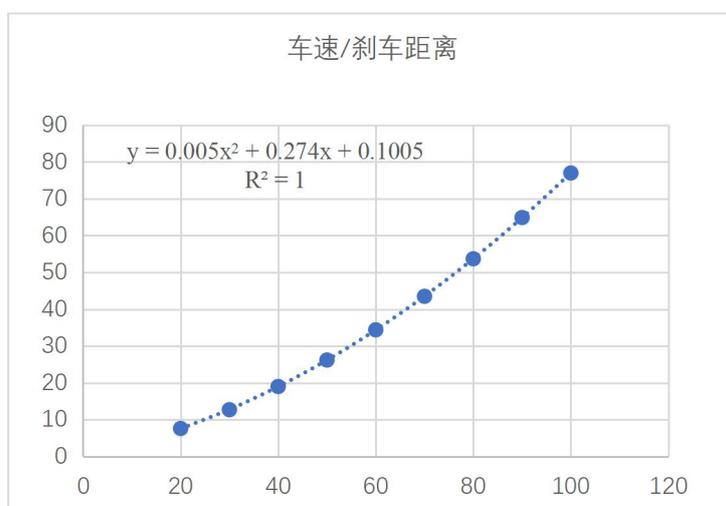
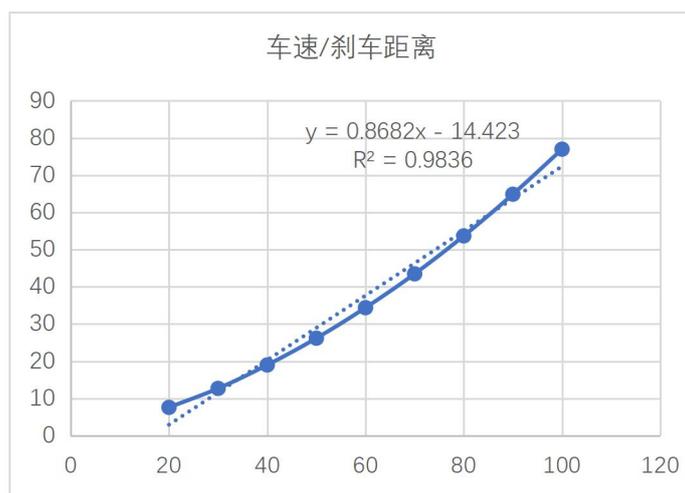
(1) 用 Excel 软件制作“车速/刹车距离”散点图。



(2) 添加趋势线，进行函数拟合，求得最佳函数模型及其表达式。

根据散点图，分别选择指数函数、一次函数、二次函数进行拟合。





通过上述三个初等函数的拟合度分析，发现二次函数的拟合程度最高 ( $R^2 = 1$ )，则可得到车速与刹车距离之间的最佳函数关系式为

$$y = 0.005x^2 + 0.274x + 0.1005。$$

活动 2 实际行车过程中通常将车速数值作为安全距离（例如车速为 120km/h，安全距离为 120m）。小组合作探究，这种做法是否合理？

总结归纳：影响安全距离的因素很多，驾车上路前要仔细阅读所驾车辆的使用说明书，了解该车辆在各种条件下的安全距离，确保行车安全。

就活动 1 中的车辆在正常条件下的安全距离，可以利用函数关系式  $y = 0.005x^2 + 0.274x + 0.1005$ ，求得以下数据：

车速/(km/h)	40	60	80	100	110
刹车距离/m	19.1	34.5	54.0	77.5	90.7
车速/(km/h)	120	145	150	180	200
刹车距离/m	105.0	145.0	153.7	211.4	254.9

从表中可以看出，在正常条件下，若将车速数值作为安全距离，当车速不大于 120km/h 时是比较安全的，而当车速大于 120km/h 时就显得不安全了（这里需要考虑驾驶人员的应急反应时间）。事实上，若考虑到雨雪天气道路湿滑、应急反应的灵敏度因人而异等因素，行车的安全距离还应增大。熟悉车辆性能、遵守交通法则、控制行车速度、保持安全距离、拒绝疲劳驾驶，应当成为每个驾驶人员的基本行为准则。

**【分析】**利用有限的的数据寻找其中所蕴含的规律，并用数学语言表达，需要较强的数据分析和数学建模能力。本案例引导学生根据已有数据，借助 Excel 软件拟合汽车车速与刹车距离之间的函数关系，再结合拟合度，最终确定最佳拟合函数模型：二次函数模型。再运用二次函数模型求解不同行车速度时的安全距离，纠正了“车速数值就是安全距离”的错误观点，增强了学生的安全意识和生命意识。

运用 Excel 软件解决实际问题，经历了收集处理数据、作散点图、数据拟合、建立函数模型、运用函数模型求解等过程，有利于培养和提升学生的数据分析、数学建模、数学精神等核心素养。

### 案例 20 3D 打印技术用料问题

**【目的】**借助双曲线单叶旋转体，建立相应的数学模型，运用定积分知识，求出其体积，提高运用数学知识解决装备制造中实际问题的能力。

**【内容】**中国制造业正处于由“中国制造”向“中国智造”过渡的转型期。

目前 3D 打印行业的技术和市场都处于快速发展和变化阶段，3D 技术在我国航空航天、汽车、船舶、核工业、模具等领域的产品设计修复中发挥重要作用，3D 打印技术的应用将成为“中国智造”的重要组成部分。

活动 1 数控班学生通过 3D 技术打印双曲线单叶旋转体模型（实心），该模型的外观尺寸如图 1 所示，现要批量生产这种模型，需要测算单个模型的打印用料数量。小组合作探究：

- (1) 如何建立合适的平面直角坐标系？
- (2) 如何求双曲线单叶旋转体轴截面边缘线所在的曲线方程？

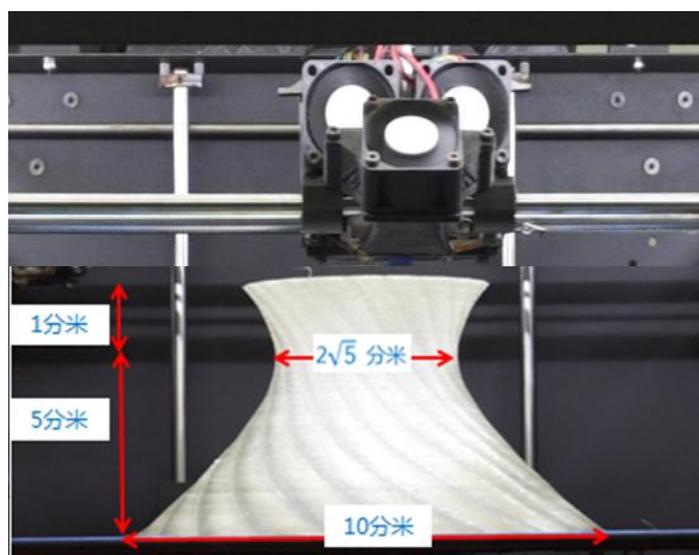


图 1 3D 打印双曲线单叶旋转体尺寸

总结归纳：根据双曲线单叶旋转体的外观尺寸，建立如图 2 所示平面直角坐标系，

可以求出边缘线所在的曲线方程为  $\frac{x^2}{5} - \frac{4y^2}{25} = 1$ 。

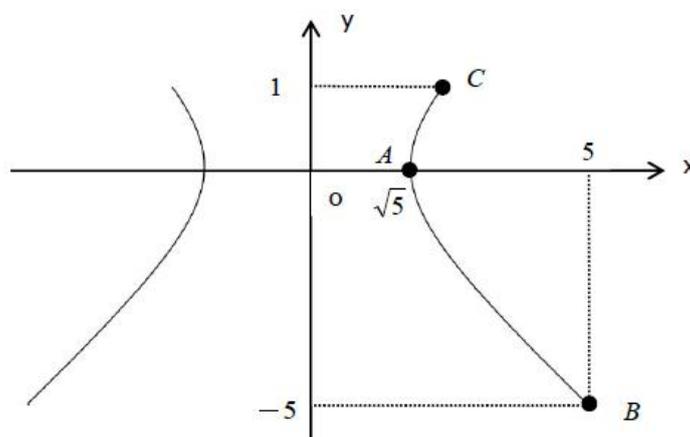


图 2 3D 打印双曲线单叶旋转体边缘线坐标图

活动2 求上述双曲线单叶旋转体的体积 $V$ 。小组合作探究：

- (1) 怎样将旋转体分割为若干个小旋转体？
- (2) 怎样近似求出旋转体的体积，用什么方法？
- (3) 如何准确求出旋转体的体积？

总结归纳：将旋转体按旋转轴（ $y$ 轴）垂直分割为若干个小旋转体，把每个小旋转体近似地看作一个圆柱体，求出其体积，所有小旋转体的体积之和则可作为旋转体体积的近似值。准确求出旋转体的体积，可以根据旋转体边缘双曲线方程，利用定积分思想求解（如图3）。

$$V = \int_{-5}^1 \pi x^2 dy = \int_{-5}^1 \pi \left( \frac{4y^2}{5} + 5 \right) dy = 199.704 \text{ (立方分米)}。$$

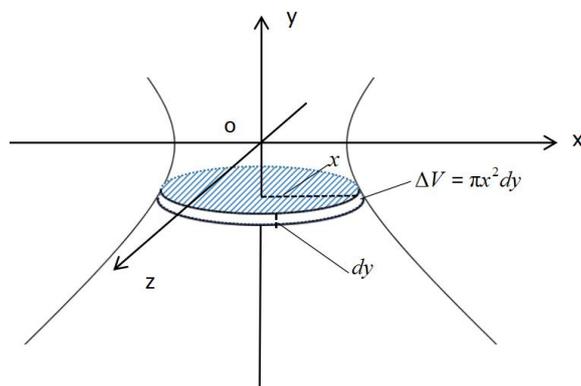


图3 3D打印双曲线单叶旋转体体积计算微元图

【分析】引入中国智能制造使用3D打印技术的例子，增强学生的爱国热情和民族自豪感，激发学习的主观能动性。由3D打印双曲线单叶旋转体用料问题转化为曲线绕轴旋转形成的几何体体积问题，这是一个数学建模和数学抽象的过程。根据实物的实际尺寸，建立合适的平面直角坐标系，进而求出双曲线的方程，再根据旋转体形成特点，结合定积分思想设计问题串，引导学生开展求解旋转体体积的探究活动。通过问题串化整为零，突破难点，促进了学生对定积分思想的深刻理解与灵活应用。

通过本案例的学习，学生经历了从具体到抽象、将实际问题转化为积分应用问题的发展过程，有利于培养和提升学生的数学运算、思想方法、数学精神等核心素养。